FOLIA 231

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 9(2017)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.9.2

Marlena Fila

Aksjomat ciągłości w rozprawie Bernarda Bolzana *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*[*]

Abstract. Bernard Bolzano's paper *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* was published in 1817. It presents a "purely analytic proof" of the intermediate value theorem for the polynomials of variable x. Aside from polynomials, Bolzano considers other kinds of functions, however the domain of these functions is not clearly defined. In this article, we show that the variable x ranges over real numbers. Specifically, we identify the axioms for the ordered field that Bolzano *implicitly* applies. We also identify the versions of continuity axiom, and show that while some of them are *implicitly* applied, others are *explicitly* stated as "basics truths".

1. Wprowadzenie

1.1. W roku 1817 Bernard Bolzano opublikował rozprawę *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*[1]. Jej celem był dowód „czysto-analityczny" – co miało oznaczać wolny od przedstawień geometrycznych – twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośredniej: Jeśli $f(x)$ jest wielo-

[*]Continuity axiom in Bolzano's memoir *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 12J15; Secondary: 01A55

Key words and phrases: Bernard Bolzano, Rein analytischer Beweis, continuity axiom, Archimedean axiom

[1]B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Gottlieb Haase, Praga 1817. W artykule będziemy ją cytować za: *Czysto-analityczny dowód twierdzenia, że między każdymi dwoma wartościami, które dają wyniki przeciwnych znaków, leży jakiś rzeczywisty pierwiastek równania*, tł. M. Fila w niniejszym tomie.

mianem takim, że $f(a)f(b) < 0$, to w przedziale (a, b) istnieje takie c, że $f(c) = 0$. W rozprawie jest ono przedstawiane jako wniosek z ogólniejszego twierdzenia: Jeśli $f(x)$ jest funkcją ciągłą taką, że $f(a)f(b) < 0$, to w przedziale (a, b) istnieje takie c, że $f(c) = 0$. Na użytek dowodu Bolzana podaje definicję ciągłości funkcji – stosowaną współcześnie, tak zwaną otoczeniową definicję ciągłości – i wykazuje, że wielomian jest funkcja ciągłą. Ten ogólny plan rozpisany jest na wiele drobnych kroków, w których stosowane są różne „prawdy" – dzisiaj powiedzielibyśmy: twierdzenia i aksjomaty. W *Przedmowie* rozprawy zawarte jest streszczenie dowodu i jako kluczowe podane są następujące „prawdy":

(a) zasada zachowania znaku zastosowana do funkcji ciągłej $f - \varphi$: „Jeśli $f\alpha < \varphi\alpha$, to na mocy prawa ciągłości jest $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$, gdy tylko i jest wystarczająco małe",

(b) zasada supremum: „gdy pewna własność M przysługuje wszystkim wartościom zmiennej wielkości i, które są mniejsze od pewnej wielkości danej, ale nie dla wszystkich wartości w ogóle, to zawsze jest jakaś największa wielkość u, o której można pokazać, że wszystkie i, które są $< u$ mają własność M",

(c) dla u spełniającego warunek $u = \sup\{i > 0 : (f - \varphi)(\alpha + i) < 0\}$ zachodzi $(f - \varphi)(\alpha + u) = 0$: „Dla tej wartości u nie może być $f(\alpha + u) < \varphi(\alpha + u)$ [...] Tym bardziej nie może być prawdą, że $f(\alpha + u) > \varphi(\alpha + u)$ [...] Musi zatem być $f(\alpha + u) = \varphi(\alpha + u)$, tj. istnieje wartość x leżąca między α i β, mianowicie $\alpha + u$, dla której funkcje fx i φx są sobie równe",

(d) dowód zasady supremum: „Pozostaje już tylko kwestia wspomnianego dowodu. Twierdzenie udowodnimy pokazując, że te wartości i, o których można pokazać, że wszystkie mniejsze od nich posiadają własność M i te, o których nie można tego pokazać mogą być umieszczone tak blisko siebie, jak tyko chcemy. Dlatego dla każdego, kto ma poprawne pojęcie wielkości istnienie i, które jest największe z tych, o których będzie można powiedzieć, że wszystkie wielkości poniżej niej mają własność M, jest rzeczywiste, tj. i jest „prawdziwą wielkością".

1.2. W rozprawie występują funkcje różnego rodzaju. Obok wielomianów jednej zmiennej postaci $a + bx^m + cx^n + ... + px^r$, gdzie $m, n, ..., r > 0$, oraz $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + ... + px + q$, gdzie $n > 0$, znajdujemy funkcje postaci $\frac{a}{b-x}$, funkcje liniowe $ax + bx$, oraz funkcję $x + \sqrt{(x-2)(x+1)}$. Bolzano nie pisze wprost jaki jest zakres zmienności argumentu x. W niektórych opracowaniach (Dadaczyński, 2006; Freudenthal, 1971; Grabiner, 1984; Grattan-Guiness, 1970) przyjmuje się jako oczywiste, że x przebiega podzbiory zbioru liczb rzeczywistych.

Wyraźne stosowanie przez Bolzana zasady supremum (ZS) można by uznać za wystarczające uzasadnienie tej tezy, jednak wersja ZS przyjęta w rozprawie nie jest równoważna tej, którą przyjmujemy we współczesnej aksjomatyce liczb rzeczywistych. Co więcej, ZS nie jest w rozprawie aksjomatem, „prawdą pierwszą", ale jest dowodzona w oparciu o zasadę, którą współcześnie nazywamy zupełnością w sensie Cauchy'ego (ZC). Przyjmując dalej współczesną perspektywę, wiemy, że sama ZC nie jest równoważna aksjomatowi ciągłości, dopiero ZC w koniunkcji z aksjomatem Archimedesa (AA) jest *pełnym* aksjomatem ciągłości. Z kolei AA nie jest w rozprawie przyjęty *explicite*, chociaż jest stosowany *implicite* i to jeszcze w kilku różnych wariantach. Mając to na uwadze, można stwierdzić, że w rozprawie Bolzana faktycznie stosowany jest aksjomat ciągłości. Podążając tym tokiem, uzasadniania, że dziedziną funkcji występujących w rozprawie Bolzana są liczby rzeczywiste.

2. Liczby rzeczywiste jako ciało uporządkowane w sposób ciągły

We współczesnej literaturze obecne są dwa podejścia do liczb rzeczywistych: konstrukcja oraz charakterystyka aksjomatyczna. W rozprawie Bolzana nie ma konstrukcji – pierwsze konstrukcje przedstawiono w roku 1872. Dlatego przyjmujemy podejście aksjomatyczne i przez liczby rzeczywiste rozumiemy ciało uporządkowane w sposób ciągły. W związku z tym, w niniejszym paragrafie przypomnimy aksjomaty liczb rzeczywistych: najpierw podamy aksjomaty ciała uporządkowanego, a następnie różne wersje aksjomatu ciągłości. Istotnie, w rozprawie Bolzana aksjomat ciągłości występuje w różnych wersjach, jedne z nich są dowodzone, inne przyjmowane jako „prawdy pierwsze”, jeszcze inne są stosowane *implicite.*

Definicja 1
Strukturę $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ *nazywamy ciałem uporządkowanym jeżeli:*

1. $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1)$ *jest ciałem przemiennym,*
2. $(\mathbb{F}, <)$ *jest zbiorem liniowo uporządkowanym, tj. relacja* $<$ *spełnia następujące warunki:*
   (a) $(\forall x, y, x \in \mathbb{F})[x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z]$,
   (b) *dla dowolnych* $x, y \in \mathbb{F}$ *zachodzi:*
   $$x < y \veebar x = y \veebar x > y^2.$$
3. *porządek* $<$ *jest zgodny z działaniami, tj.:*
   (a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{F})[x < y \Rightarrow x + z < y + z]$,
   (b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{F})[x < y \wedge 0 < z \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z]$.

Definicja 2
Niech $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ *będzie ciałem uporządkowanym.*
(C1) Każdy podzbiór $A \subset \mathbb{F}$, $A \neq \emptyset$, *ograniczony z góry posiada kres górny, tj. istnieje* $a \in \mathbb{F}$ *takie, że*

$$(\forall y \in A)[y \leq a] \wedge (\forall x \in \mathbb{F})(\forall y \in A)[y \leq x \Rightarrow a \leq x].$$

Kres górny zbioru (supremum) jest wyznaczony jednoznacznie. Oznaczamy go jako $a = supA$. *Warunek (C1) nazywa się zasadą supremum.*

[2]Symbol $\veebar$ oznacza tzw. alternatywę wykluczającą, co znaczy, że zachodzi dokładnie jeden ze składników alternatywy: $x < y \vee x = y \vee x > y$.

Definicja 3
Ciało uporządkowane, w którym spełniony jest warunek (C1) nazywamy ciałem uporządkowanym w sposób ciągły.

W opracowaniu Cohen, Ehrlich (1963) podany jest dowód, że każde dwa ciała uporządkowane w sposób ciągły są izomorficzne. Jest to tak zwane twierdzenie o kategoryczności aksjomatyki liczb rzeczywistych. Na podstawie twierdzenia o kategoryczności liczby rzeczywiste są definiowane jako ciało uporządkowane w sposób ciągły.

Niżej podamy inne wersje aksjomatu ciągłości. Zaczniemy od definicji przekroju Dedekinda.

Definicja 4
Parę uporządkowaną (L, U) nazywamy przekrojem Dedekinda zbioru liniowo uporządkowanego $(\mathbb{F}, <)$ jeśli spełnia następujące warunki:

1. $L, U \neq \emptyset$,
2. $L \cup U = \mathbb{F}$,
3. $(\forall x \in L)(\forall y \in U)[x < y]$.

Definicja 5
Przekrój (L, U) nazywamy luką, gdy w zbiorze L nie istnieje element największy, a w zbiorze U nie istnieje element najmniejszy.

Twierdzenie 1
Następujące warunki są równoważne warunkowi (C1)[3]*:*

(C2) Ciało $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem archimedesowym oraz każdy ciąg Cauchy'ego $(a_n) \subset \mathbb{F}$ ma granicę $g \in \mathbb{F}$, tj. dla każdego ciągu $(a_n) \subset \mathbb{F}$ spełniającego warunek:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n > N)(\mid a_m - a_n \mid < \varepsilon)$$

istnieje liczba g należąca do $\mathbb{F}$ taka, że zachodzi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\mid a_n - g \mid < \varepsilon).$$

(C3) Niech funkcja $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ będzie ciągła na odcinku $[a, b]$ i niech $f(a) \cdot f(b) < 0$. Wówczas istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $f(c) = 0$.

(C4) Żaden przekrój Dedekinda zbioru $(\mathbb{F}, <)$ nie wyznacza luki.

Warunek (C3) to twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośredniej (IVT). W rozprawie Bolzana jest ono dowodzone i z niego jest wyprowadzane twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośredniej dla wielomianu. Fakt, iż (IVT) wynika z aksjomatu ciągłości, np. (C1), jest dobrze znany[4]. Mniej znany jest fakt, że z (IVT) wynika aksjomat ciągłości, dlatego naszkicujemy dowód implikacji (C3) $\Rightarrow$ (C4)[5].

---
[3] W Cohen, Ehrlich, 1963 podane są dowodu równoważności aksjomatów (C1), (C2), (C4).
[4] Zob. np. Błaszczyk, 2016.
[5] Za Błaszczyk, 2016.

Niech ciało $\mathbb{F}$ nie spełnia (C4). Istnieje wówczas przekrój (L, U) zbioru $(\mathbb{F}, <)$, który wyznacza lukę. Definiujemy funkcję f następująco:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in L, \\ 1 & \text{gdy } x \in U. \end{cases}$$

Pokazuje się, że f jest ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbb{F}$ i nie spełnia warunku (C3).

W matematyce funkcjonuje oczywiście wiele innych wersji aksjomatu ciągłości. Cztery wyżej wybrane są istotne w analizie rozprawy Bolzana. Kolejnym aksjomatem ważnym z uwagi na analizę rozprawy Bolzana jest aksjomat Archimedesa. W rozprawie jest on stosowany *implicite* w kilku wersjach. Niżej przedstawiamy kilka równoważnych wersji aksjomatu Archimedesa.

TWIERDZENIE 2
Następujące warunki są równoważne[6]*:*

(A1) $(\forall a, b \in \mathbb{F})(\exists n \in \mathbb{N})[(0 < a < b) \Rightarrow na > b]$*;*

(A2) $(\forall a \in \mathbb{F})(\exists n \in \mathbb{N})[n > a]$*;*

(A3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$*.*

Ciało uporządkowane, w którym spełniony jest aksjomat A1 nazywamy archimedesowym.

Dowodzi się, że w każdym ciele uporządkowanym w sposób ciągły spełniony jest aksjomat Archimedesa[7].

3. Aksjomaty ciała uporządkowanego w rozprawie Bolzana

W tym paragrafie pokażemy, w jaki sposób Bolzano stosuje aksjomaty dotyczące porządku: liniowość oraz zgodność z działaniami.

W dowodzie IVT Bolzano dowodzi, że znaleziona liczba U *musi leżeć między [liczbami]* 0 *oraz* i, tzn., że $U \in (0, i)$. W tym celu pokazuje najpierw, że:
Po pierwsze nie może być równa i (...) Po drugie, jeszcze mniej może być prawdą, że $U > i$[8].

Zapiszemy to następująco:

$$[\neg(U = i) \wedge \neg(U > i)]$$

Ostatecznie Bolzano stwierdza:
Dlatego (...) U *musi leżeć między* 0 *a* i*.*

Bolzano wyraźnie zakłada, że zachodzi dokładnie jeden z członów poniższej alternatywy:

$$(U = i) \vee (U > i) \vee (U < i)$$

Pokazuje bowiem, że:

$$[\neg(U = i) \wedge \neg(U > i)] \Rightarrow U < i$$

[6]Zob. Błaszczyk, 2012.
[7]Zob. np. Cohen, Ehrlich, 1963.
[8]Cytaty z *Rein analytischer Beweis...* zaznaczany kursywą. Tłumaczenia są mojego autorstwa.

Implicite, korzysta tu z prawa trychotomii.

A skąd wiemy, że $U > 0$? Tego Bolzano nie pokazuje wprost. Z wcześniejszej części dowodu wiemy, że $\omega < U$ oraz że ω *oznacza dodatnią wielkość*. Wobec tego:

$$(0 < \omega \wedge \omega < U) \Rightarrow (0 < U),$$

a to oznacza, że Bolzano korzysta z przechodniości relacji porządku. Wcześniej pokazano, że autor rozprawy wykorzystuje prawo trychotomii, dlatego uzasadnione jest stwierdzenie, że Bolzano wykorzystuje w rozprawie liniowość porządku.

Zgodność porządku z dodawaniem znajdujemy w dowodzie IVT. Na początku dowodu Bolzano zakłada:

Po pierwsze załóżmy, że α i β są obie dodatnie i, że (bez utraty ogólności) β jest większą z obu; więc $\beta = \alpha + i$, gdzie i oznacza dodatnią wielkość.

Zapiszemy to następująco:

$$\alpha < \beta \Rightarrow (\exists i)[\beta = \alpha + i].$$

Następnie Bolzano pokazuje, że liczba $U \in (0, i)$. Czytamy:

Dlatego (...) U leży między 0 *a i, i w konsekwencji $\alpha + U$ leży między α i β.*

Zapiszemy to w postaci: $0 < U < i \Rightarrow \alpha + 0 < \alpha + U < \alpha + i$.

Powyższa implikacja jest oparta na zgodności porządku z dodawaniem.

W kolejnym fragmencie odnajdujemy zgodność porządku z mnożeniem:

Załóżmy, że wzrost szeregu, który zachodzi wraz ze zwiększaniem go o każde n wyrazów jest $=$ lub $>$ d i chcemy, by szereg był większy od danej wielkości D. Weźmy liczbę całkowitą r, która jest $=$ lub $> \frac{D}{d}$ i wydłużymy szereg o $r \cdot n$ wyrazów. Uzyskamy wzrost, który jest $=$ lub $>$ $(r \cdot d =$ lub $> \frac{D}{d} \cdot d = D)$.

Przyjmijmy, że r oznacza liczbę całkowitą, D – liczbę rzeczywistą, d – liczbę dodatnią (ten warunek wynika z kontekstu). Przy tych oznaczeniach mamy $\frac{D}{d} \leq r$ oraz $0 < d$, stąd Bolzano wnioskuje, że $\frac{D}{d} \cdot d \leq r \cdot d$. Rozumowanie to jest poprawne przy założeniu zgodności porządku z mnożeniem.

4. Zasada supremum

W rozprawie Bolzana aksjomat ciągłości występuje w postaci zasady supremum. Sformułowany jest w następujący sposób:

[1] *Jeżeli własność M nie zachodzi dla wszystkich wartości zmiennej wielkości x, ale dla wszystkich tych, które są mniejsze niż pewne u*, [2] *to zawsze jest pewna wielkość U, która jest największą z tych, o których można stwierdzić, że wszystkie mniejsze x mają własność M.*

Zdanie [1] zapiszemy jak następuje:

$$\neg(\forall x)(M(x)) \wedge (\exists u)(\forall x)(x < u \Rightarrow M(x)). \tag{1}$$

Równoważnie:

$$(\exists u)(\forall x)(x < u \Rightarrow M(x)) \wedge (\exists x)(\neg M(x)). \tag{2}$$

Odpowiednio zdanie [2] przedstawimy w następujący sposób:

$$(\exists U)[(\forall x)(x < U \Rightarrow M(x)) \wedge (\forall u)(\forall x)(x < u \Rightarrow M(x)) \Rightarrow u < U]. \tag{3}$$

Zależność między zdaniami [1] i [2] można przedstawić w postaci implikacji (2) $\Rightarrow$ (3). Bolzano przyjmuje, że $u < U$ powinna być nierówność nieostra $u \leq U$.

5. Dowód zasady supremum

Pokażemy, że w dowodzie zasady supremum Bolzano wykorzystuje aksjomat ciągłości w postaci (C1).

5.1. Ciąg Cauchy'ego

[3] *Teraz, gdyby pierwszy przypadek został potwierdzony, prawdziwość twierdzenia jest już udowodniona. W drugim przypadku można zauważyć, że wielkość* $u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+...+\frac{D}{2^{m+n+...+r}}$ *przedstawia po prostu szereg, którego liczbę wyrazów można dowolnie zwiększać (...)*

W dowodzie zasady supremum Bolzano ostatecznie konstruuje ciąg nieskończony i zapisuje jego sumę:

$$u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+...+\frac{D}{2^{m+n+...+r}}.$$

Następnie pisze, że ten ciąg *należy do klasy opisanej w §5 (...) Dlatego ma własność z §9 (...)*. Przyjrzyjmy się bliżej tym fragmentom.

W §5 Bolzano sformułował tzw. warunek Cauchy'ego.

[4] *Szczególnie interesująca wśród takich szeregów jest klasa szeregów posiadających własność, że wraz z ich przedłużaniem o kolejne wyrazy, zmiana wartości (wzrost lub spadek) pozostaje zawsze mniejsza od pewnej wielkości, która to znowu może być traktowana jako tak mała jak to pożądane pod warunkiem, że szereg będzie przedłużany wystarczająco daleko.*

Szczególnie interesująca wśród takich szeregów – Bolzano wyróżnia tu pewne ciągi spośród zdefiniowanych wcześniej ciągów ograniczonych. Sformułowanie *przedłużany wystarczająco daleko* interpretujemy jako *od pewnego wyrazu.*

Zmiana wartości to liczba nieujemna. Zdefiniowana została w rozprawie w następujący sposób:

[5] *Zmiana wartości, tj. wzrost lub spadek wartości szeregu spowodowany zwiększeniem liczby wyrazów przez jakiś określony zbiór, np. przez jeden (...)*

Natomiast *wartość szeregu* (ciągu) to po prostu jego suma częściowa:

[6] *Wartość tego szeregu, tj. wielkość powstała z sumowania jego wyrazów.*

Bolzano wprowadza konwencję oznaczeniową.

[7] *Więc na przykład*

$$A+Bx+Cx^2+...+Rx^r=F^rx,$$

a z drugiej strony

$$A+Bx+Cx^2+...+Rx^r+...+Sx^{r+s}=F^{(r+s)}x.$$

Używając oznaczeń Bolzana, *zmianę wartości* zapiszemy następująco:

$$F^{n+r}x - F^r x.$$

Uwzględniając powyższe uwagi, zdanie [4] zapiszemy następująco:

$$(\forall \varepsilon)(\exists N)(\forall n > N)(F^{n+r}x - F^n x < \varepsilon), \tag{4}$$

gdzie $r > 0$ jest liczbą całkowitą.

Dziś warunek Cauchy'ego zapisujemy w postaci:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n > N)(\mid a_m - a_n \mid < \varepsilon) \tag{5}$$

5.2. Granica ciągu

W §9 Bolzano definiuje granicę ciągu.

[8] *W związku z tym, gdy pewne szeregi mają tę własność, że każdy wyraz jest skończony [endlich], ale zmiana, która zachodzi przy kontynuowaniu szeregu jest mniejsza od dowolnej wielkości pod warunkiem, że liczba wziętych wyrazów jest wystarczająco duża,* [9] *to wówczas zawsze jest dokładnie jedna stała wielkość, taka że wartości tego szeregu mogą znaleźć się dowolnie blisko niej, gdy jest on kontynuowany odpowiednio daleko.*

Sformułowanie *zmiana, która zachodzi przy kontynuowaniu szeregu* dotyczy *zmiany wartości* zdefiniowanej wcześniej. Fragment *liczba wziętych wyrazów jest wystarczająco duża* interpretujemy jako *od pewnego wyrazu.*

Zdanie [8] to sformułowany w postaci (4) warunek Cauchy'ego. Natomiast zdanie [9] zapiszemy następująco:

$$(\exists g)(\forall \varepsilon)(\exists N)(\forall n > N)(F^n x - g < \varepsilon). \tag{6}$$

Jest to – jak widać – współczesna definicja granicy. Bolzano zaznacza, że granica jest tylko jedna. Implikację [8] $\Rightarrow$ [9] zapiszemy więc za pomocą współczesnej notacji w postaci (4) $\Rightarrow$ (6).

W §5 Bolzano zdefiniował tzw. warunek Cauchy'ego. W §9 zapisał, że ciąg, który spełnia ten warunek, ma granicę. W dowodzie zasady supremum korzysta więc z zupełności w sensie Cauchy'ego. Pełny aksjomat ciągłości w wersji z zupełnością w sensie Cauchy'ego, czyli (C2), wymaga jeszcze aksjomatu Archimedesa. W następnym paragrafie pokażemy, w jakiej postaci aksjomat Archimedesa występuje w rozprawie Bolzana.

5.3. Aksjomat Archimedesa

Wróćmy do zdania, które zapisaliśmy formułą (2). Bolzano przyjmuje, że warunek ten jest spełniony. Następnie formułuje ciąg pytań, w których występuje parametr m:

[10] *Jeżeli chcę zapytać – czy M zachodzi dla wszystkich* $x < u + \frac{D}{2^m}$*, gdzie wykładnik m jest najpierw* 0*, potem* 1*, potem* 2*, potem* 3*, itd. – to jestem pewny, że pierwsze z moich pytań musi zostać odrzucone. (...) Więc to kwestia tego, czy każde kolejne pytanie, gdy m kładzie się coraz większe, będzie odrzucone.*

Pytania te możemy zapisać w postaci:

$$(\forall x)(x < u + \frac{D}{2^m} \Rightarrow M(x))? \tag{7}$$

Wówczas zdanie *Więc to kwestia tego, czy każde kolejne pytanie, gdy m kładzie się coraz większe, będzie odrzucone* oznacza pytanie o prawdziwość zdania:

$$(\forall m)(\forall x)(x < u + \frac{D}{2^m} \Rightarrow M(x)). \tag{8}$$

[11] *Jest jasne, że u jest największą wartością, dla której zachodzi twierdzenie, że wszystkie mniejsze x mają własność M.*

Implikacja wyrażona w tym zdaniu ma owszem miejsce, ale przy założeniu aksjomatu Archimedesa. Pokażemy to, śledząc dowód, który Bolzano zawarł w kolejnych zdaniach.

[12] *Na razie nie byłoby większego, np.* $u + d$*, dla którego twierdzenie by zachodziło, tzn. wszystkie* $x < u + d$ *miałyby własność M;* [13] *ale jeśli wezmę m wystarczająco duże, to* $u + \frac{D}{2^m}$ *będzie* $< u + d$ *i w konsekwencji* [14] *jeśli M zachodzi dla wszystkich* $x < u + d$*, to tak samo zachodzi dla wszystkich* $x < u + \frac{D}{2^m}$*; więc nie mógłbym zaprzeczyć pytaniu, lecz należy je potwierdzić.*

Wywód ten zapiszemy następującymi formułami:

$$(\forall x)(x < u + d \Rightarrow M(x)), \quad \text{dla pewnego} \quad d > 0. \tag{9}$$

$$(\exists m)(u + \frac{D}{2^m} \leq u + d), \tag{10}$$

lub inaczej

$$(\exists m)(\frac{D}{2^m} < d). \tag{10'}$$

W zdaniu [13] Bolzano korzysta z założenia

$$(\forall D, d > 0)(\exists m)(\frac{D}{2^m} < d),$$

które jest szczególną wersją aksjomatu (A2). Ostatnie zdanie, [14], jest już prostą konsekwencją [12] i [13].

Założenie wykorzystane w zdaniu [13], to nie jedyna wersja aksjomatu Archimedesa stosowana przez Bolzana. W dowodzie zasady supremum Bolzano korzysta z faktu, że ciąg $\frac{D}{2^m}$ jest zbieżny do zera, co znaczy, że zakłada wersję (A3). Aksjomat Archimedesa za każdym razem stosowany jest w sposób niejawny, jako milcząco przyjęte założenie.

Pokazaliśmy zatem, że w dowodzie zasady supremum Bolzano wykorzystuje inną – równoważną – postać aksjomatu ciągłości, mianowicie koniunkcję dwóch warunków: zupełności w sensie Cauchy'ego i aksjomatu Archimedesa.

6. Twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośrednich

Z twierdzenia (1) wiemy, że twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośredniej przez dowolną funkcję ciągłą, IVT lub inaczej (C3), jest jedną z wersji aksjomatu ciągłości. Twierdzenie to Bolzano formułuje w następującej sposób:
[15] *Jeżeli dwie funkcje x, fx i φx, różnią się zgodnie z prawem ciągłości albo dla wszystkich x, albo tylko dla tych, które leżą między α i β, i jeśli $f\alpha < \varphi\alpha$ i $f\beta > \varphi\beta$, to zawsze jest pewna wartość x między α i β, dla której $fx = \varphi x$.*

Przywołane tu *prawo ciągłości* to sformułowana we wstępie rozprawy definicja funkcji ciągłej. Fragment *dla wszystkich x albo tylko dla tych, które leżą między α i β* należy interpretować jako *w całej swojej dziedzinie lub tylko w pewnym jej przedziale*. Przyjmiemy, że jest to przedział otwarty. Przy tych założeniach, twierdzenie przyjmie następującą postać:

Niech f, φ będą funkcjami ciągłymi zmiennej x. Wówczas zachodzi:

$$[f(\alpha) < \varphi(\alpha) \wedge f(\beta) > \varphi(\beta)] \Rightarrow (\exists x)[x \in (\alpha, \beta) \wedge f(x) = \varphi(x)] \tag{11}$$

7. Dowód twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich

Dowód IVT Bolzano rozpoczyna od pokazania, że:

[16] *dla wszystkich wartości ω, które są mniejsze niż pewna wielkość, można stwierdzić, że dwie funkcje $f(\alpha+\omega)$ i $\varphi(\alpha+\omega)$ są w stosunku mniejsza do większej.*

Niech *wielkością*, od której mniejsze są ω, będzie u. Zdanie [16] zapiszemy wówczas następującą formułą:

$$(\exists u)(\forall \omega)(\omega < u \Rightarrow f(\alpha + \omega) < \varphi(\alpha + \omega)). \tag{12}$$

Zdanie to wynika z przyjętej na wstępie zasady zachowania znaku oraz założenia $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$. W kolejnym zdaniu Bolzano pisze o *własności M*:

[17] *Oznaczmy tę własność przez M. Możemy więc powiedzieć, że wszystkie ω, które są mniejsze niż pewna wielkość, posiadają własność M.*

Własność M zapiszemy w następujący sposób

$$M(\omega):\ f(\alpha + \omega) < \varphi(\alpha + \omega). \tag{13}$$

Formuła $M(\omega)$ to własność M, o której Bolzano pisze w związku z zasadą supremum; zob. wyżej (rozdział 4 niniejszej pracy).

Następnie Bolzano dowodzi, że

[18] *ta własność M nie zachodzi dla wszystkich wartości ω (...)*, tj.

$$(\exists \omega)(f(\alpha + \omega) \geq \varphi(\alpha + \omega)). \tag{14}$$

Z założenia wiadomo, że $f(\beta) > \varphi(\beta)$, wystarczy więc przyjąć $\omega = \beta - \alpha$. W dowodzie IVT formuła (13) jest własnością M znaną z zasady supremum. Koniunkcja zdań (12) i (14) oznacza, że spełnione są założenia zasady supremum, tj. warunek (2).

Czytamy dalej:

[19] *Zgodnie z §12 musi być dana pewna wielkość U, która jest największą z tych wartości, dla których można stwierdzić, że wszystkie ω, które są $< U$ mają własność M.*

Zapiszemy to, jak następuje:

$$(\exists U)[(\forall \omega)(\omega < U \Rightarrow M(\omega)) \wedge (\forall U_1)(\forall \omega)(\omega < U_1 \Rightarrow M(\omega) \Rightarrow U_1 < U)]. \qquad (15)$$

W §12 Bolzano sformułował i udowodnił zasadę supremum.

Zauważmy przy tym, że zasada supremum w wersji przyjętej przez Bolzana jest różna od wersji współczesnej, czyli (C1). Bolzano stosuje ją w odniesieniu do własności M. W przełożeniu na język zbiorów otrzymujemy

$$A = \{\omega \in \mathbb{F} : M(\omega)\}.$$

W (C1) mamy dowolne podzbiory, w ujęciu Bolzana podzbiory definiowane są przez formułę.

8. Wnioski

W rozprawie *Rein analytischer Beweis...* Bolzano wielokrotnie korzysta z aksjomatu ciągłości. Przyjmując *implicite*, że zakresem zmienności x są liczby rzeczywiste, formułuje zasadę supremum i udowadnia ją. W dowodzie tym wykorzystuje aksjomat ciągłości w postaci koniunkcji warunków: zupełności w sensie Cauchy'ego i aksjomatu Archimedesa. Sam aksjomat Archimedesa także jest stosowany wielokrotnie i niejawnie. Zasada supremum wykorzystana zostaje w dowodzie IVT dla dowolnej funkcji ciągłej. Twierdzenie to także jest jednym z równoważnych sformułowań aksjomatu ciągłości.

Literatura

Artin, E., Schreier, O.: 2007, Algebraische Konstruktion reeller Körper, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar derHamburgischen Universität 5 (1926), 85–99; The algebraic construction of real fields, w: M. Rosen (red.), *Exposition by Emil Artin*, AMS-LMS, 107–118.

Błaszczyk, P.: 2012, O ciałach uporządkowanych, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **4**, 15–30.

Błaszczyk, P.: 2016, A purely algebraic proof of the Fundamental Theorem of Algebra, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **8**, 6–22.

Bolzano, B.: 1817, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Gottlieb Hasse, Praga.

Bolzano, B.: 2004, Purely analytic proof of the theorem that between any two values which give results of opposite signs, there lies at least one real root of the equation, w: S. Russ (red.), *The Mathematical Works of Bernard Bolzano*, Oxford University Press, Oxford, 251–263.

Cohen, L. W., Ehrlich, G.: 1963, *The Structure of the Real Number System*, Van Nostrand Co., Princeton, New Jersey.

Dadaczyński, J.: 2006, *Bernard Bolzano i idea logicyzmu*, Biblos, Tarnów.

Freudenthal, H.: 1971, Did Cauchy Plagiarize Bolzano?, *Archive for the History of Exact Science* **7**(5), 375–392.

Grabiner, J.: 1984, Cauchy and Bolzano. Tradition and transformation in the history of mathematics, w: E. Mendelsohn (red.), *Transformation and Tradition in the Sciences. Essays in Honor of I. Bernhard Cohen*, Cambridge University Press, Cambridge, 105–124.

Grattan-Guiness, I.: 1970, Bolzano, Cauchy and the ”New Analysis” of the Early Nineteenth Century, *Archive for History of exact sciences* **6**, 372–400.

Teismann, H.: 2013, Toward a More Complete List of Completeness Axioms, *The American Mathematical Monthly* **120**(2), 99–114.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail marlena-fila@wp.pl