Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis
Folia 36 Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia I (2006)

Ewa Lubaś

Analiza błędów z geometrii elementarnej popełnianych przez kandydatów na studia matematyczne w Akademii Pedagogicznej w Krakowie dokonana na podstawie wyników egzaminów wstępnych na kierunek matematyka w latach 2003 i 2004

Abstract. In the article the errors in the solutions of geometry problems made by the candidates for the first year of the mathematical studies at the Pedagogical University of Cracow during the entrance examinations in 2003 and 2004 are analysed. Every geometry problem is provided with the examples of its solutions, and the detailed conclusions are drawn from the analysis. In the final part of the article a general didactic analysis of the errors is carried out as well as some aspects of teaching necessary to improve students' knowledge of geometry are taken into consideration.

Przedmowa

Od wielu lat obserwuje się podczas egzaminów wstępnych słabe przygotowanie z geometrii kandydatów na studia matematyczne w Akademii Pedagogicznej. W tym artykule podjęto próbę przeanalizowania błędów w rozwiązywanych zadaniach geometrycznych popełnianych przez kandydatów podczas egzaminów wstępnych. Analizie poddano rozwiązania zadań kandydatów, którzy egzaminu wstępnego nie zdali w roku 2003, oraz zadania kandydatów, którzy egzamin wstępny zdali w 2004 roku.

Zadania z geometrii proponowane na egzamin wstępny są tak dobierane, aby ich rozwiązania dawały nie tylko możliwość sprawdzenia ogólnej wiedzy geometrycznej i sprawności rachunkowej, ale przede wszystkim sprawdzały umiejętność logicznego myślenia kandydata, przeprowadzania przez niego choćby prostych rozumowań dedukcyjnych, formułowania hipotez oraz poprawnego uzasadniania wyciąganych wniosków. Każde zadanie geometryczne można było rozwiązywać kilkoma sposobami; jedne rozwiązania mogły być bardzo krótkie, inne wymagały stosowania standardowych, choć czasem dość skomplikowanych przekształceń algebraicznych.

Część I. Rekrutacja na kierunek matematyka w roku 2003

Lista zadań zaproponowanych na egzamin wstępny na kierunek matematyka w AP na rok akademicki 2003/2004 zawierała 5 zadań z geometrii. Były to następujące zadania:

Zadanie 5 (9 punktów)
Dana jest prosta m o równaniu $2x - y - 4 = 0$. Przez A oznaczono punkt przecięcia tej prostej z osią y.

1. *Niech A' oznacza obraz punktu A w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Napisać równanie prostej k prostopadłej do prostej m i przechodzącej przez punkt A'.*
2. *Uzasadnić, że trójkąt $AA'P$, gdzie P jest punktem przecięcia prostych m i k, nie jest równoramienny.*

Zadanie 7 (9 punktów)
Dwa okręgi są zewnętrznie styczne i każdy z nich jest jednocześnie styczny do ramion kąta ostrego. Odległości środków tych okręgów od wierzchołka kąta są odpowiednio równe 10 cm i 15 cm. Obliczyć długości promieni tych okręgów.

Zadanie 8 (12 punktów)
W równoległoboku $ABCD$ przekątna AC ma długość d i jest nachylona do boku AD pod kątem o mierze α. Prosta przechodząca przez środek S boku AD i wierzchołek B przecina przekątną AC w punkcie E. Kąt wypukły SEA ma miarę β. Obliczyć pole tego równoległoboku.

Zadanie 9 (10 punktów)
W kulę o promieniu długości R wpisano stożek, którego długość promienia podstawy jest równa $\frac{1}{2}R$. Wyznaczyć stosunek objętości kuli do objętości stożka.

Zadanie 10 (12 punktów)
W sześcianie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ przez krawędź BC i środek symetrii ściany $A_1B_1C_1D_1$ poprowadzono płaszczyznę. W wyniku przekroju otrzymano czworokąt. Wyznaczyć kąt ostry między przekątnymi tego czworokąta oraz kąty nachylenia tych przekątnych do płaszczyzny $ABCD$. Wykazać, że kąt ostry między przekątnymi przekroju jest dwa razy większy od kąta zawartego między dowolną przekątną tego przekroju a płaszczyzną $ABCD$.

Do egzaminu wstępnego na I rok matematyki na rok akademicki 2003/2004 przystąpiło 261 kandydatów. Z nich 119 nie zdało tego egzaminu. Wśród kandydatów, którzy nie zdali egzaminu, 13 rozwiązywało jedynie zadania geometryczne, w tym 8 tylko zadanie z geometrii analitycznej.

Poniższe tabele przedstawiają liczby punktów uzyskanych przez kandydatów z poszczególnych zadań z geometrii.

Tabela I.2. Zadanie 5 – liczba kandydatów uzyskujących daną liczbę punktów

Liczba punktów										Razem
9	8-8$\frac{1}{2}$	7-7$\frac{1}{2}$	6-6$\frac{1}{2}$	5-5$\frac{1}{2}$	4-4$\frac{1}{2}$	3-3$\frac{1}{2}$	2-2$\frac{1}{2}$	1-1$\frac{1}{2}$	0	
31	17	9	12	10	8	8	8	3	2	108

Tabela I.3. Zadanie 7 – liczba kandydatów uzyskujących daną liczbę punktów

Liczba punktów											Razem
9	8-8$\frac{1}{2}$	7-7$\frac{1}{2}$	6-6$\frac{1}{2}$	5-5$\frac{1}{2}$	4-4$\frac{1}{2}$	3-3$\frac{1}{2}$	2-2$\frac{1}{2}$	1-1$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
–	–	–	3	5	13	3	16	25	5	12	82

Tabela I.4. Zadanie 8 – liczba kandydatów uzyskujących daną liczbę punktów

Liczba punktów														Razem
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	0	
–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	9	39	24	73

Tabela I.5. Zadanie 9 – liczba kandydatów uzyskujących daną liczbę punktów

Liczba punktów											Razem
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
–	1	8	6	5	3	17	9	31	2	1	83

Tabela I.6. Zadanie 10 – liczba kandydatów uzyskujących daną liczbę punktów

Liczba punktów														Razem
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1-1$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
–	–	–	–	–	–	1	5	1	–	2	5	14	7	35

Jak widać z powyższych zestawień, najwięcej kłopotów sprawiało kandydatom rozwiązanie zadania 8 i zadania 10.

W grupie pozostałych 141 kandydatów, którzy zdali egzamin wstępny, liczby punktów uzyskanych z tych zadań były nieco wyższe. Zestawiono je w poniższych tabelach.

Liczby punktów uzyskanych z zadań: 8 i 10 przez 141 kandydatów, którzy egzamin zdali.

Tabela I.7. Zadanie 8 – liczba kandydatów uzyskujących daną liczbę punktów

Liczba punktów														Razem
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	0	
3 (2)	2 (2)	–	–	1 (1)	2 (0)	4 (2)	2 (1)	6 (5)	7 (4)	6 (2)	16 (2)	36 (12)	22 (6)	107

Tabela I.8. Zadanie 10 – liczba kandydatów uzyskujących daną liczbę punktów

Liczba punktów														Razem
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	0	
4 (3)	2 (2)	5 (2)	4 (1)	2 (1)	3 (1)	6 (4)	13 (4)	11 (3)	12 (5)	3 (1)	7 (2)	8 (2)	8 (8)	88

Objaśnienia: W nawiasach podano liczby tych kandydatów uzyskujących wskazaną liczbę punktów, którzy w łącznej klasyfikacji ze wszystkich zadań otrzymali powyżej 50 punktów (takich kandydatów było 39). Z tej grupy 7 kandydatów otrzymało z każdego z wymienionych zadań najwyżej 1 punkt (tj. wykonało jedynie rysunek), a mniej niż 6 punktów z każdego z zadań 8 i 10 otrzymało aż 26 kandydatów.

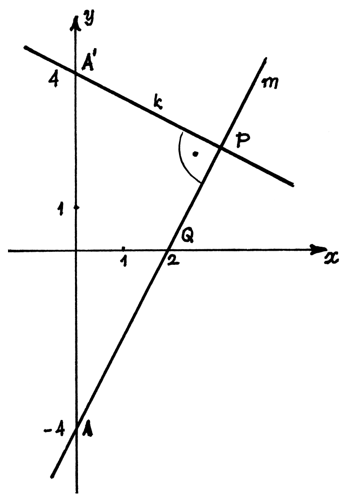
W dalszej części artykułu podano szkic rozwiązania każdego zadania i najczęściej występujące błędy w jego rozwiązaniu.

Przykładowe rozwiązanie zadania 5

Dana prosta $m:\ 2x - y - 4 = 0$ przecina oś y w punkcie $A = (0, -4)$. Prosta k prostopadła do m i przechodząca przez punkt $A' = (0, 4)$, symetryczny do punktu A względem początku układu współrzędnych, ma równanie $x + 2y - 8 = 0$ (rys. I.1).

W trójkącie prostokątnym APA', AA' jest przeciwprostokątną, a więc jest najdłuższym bokiem. Równymi ramionami mogą być jedynie odcinki AP i $A'P$. Na to jednak potrzeba i wystarcza, aby symetralna odcinka AA' była osią symetrii tego trójkąta. Symetralną odcinka AA' jest w tym przypadku prosta osi x i do niej musiałby należeć wierzchołek P tego trójkąta tj. punkt wspólny prostych m, k. Łatwo jednak można sprawdzić, że punkt Q, w którym prosta m przecina oś x, ma współrzędne $(2, 0)$ i nie należy do prostej k. Zatem trójkąt APA' nie jest trójkątem równoramiennym.

Można również w inny sposób uzasadnić, że trójkąt APA' nie jest trójkątem równoramiennym. Na przykład tak: trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej AA' byłby trójkątem równoramiennym wtedy i tylko wtedy, gdyby kąt nachylenia prostej m do osi x miał miarę $45°$ albo $135°$.Współczynnik kierunkowy tej prostej musiałby być wtedy równy $+1$ lub -1. Współczynnik kierunkowy prostej m jest równy 2, zatem trójkąt APA' nie jest równoramienny.



Rysunek I.1

Błędy w rozwiązaniu zadania 5

Na 31 kandydatów, którzy otrzymali maksymalną liczbę punktów z zadania 5, aż 25 liczyło niepotrzebnie długości wszystkich trzech boków trójkąta $AA'P$. Jedynie 6 kandydatów inaczej uzasadniło odpowiedź. Na przykład:

— Wyznaczając punkty przecięcia prostych m, k z osią x i stwierdzając, że są one różne.

— Wyznaczając współrzędne punktu P i stwierdzając, że nie należy on do osi x.

— Wyznaczając cosinusy kątów nachylenia prostych m, k do osi y.

— Porównując tylko długości odcinków AP i $A'P$.

— Stwierdzając, że spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka P nie jest środkiem odcinka AA'.

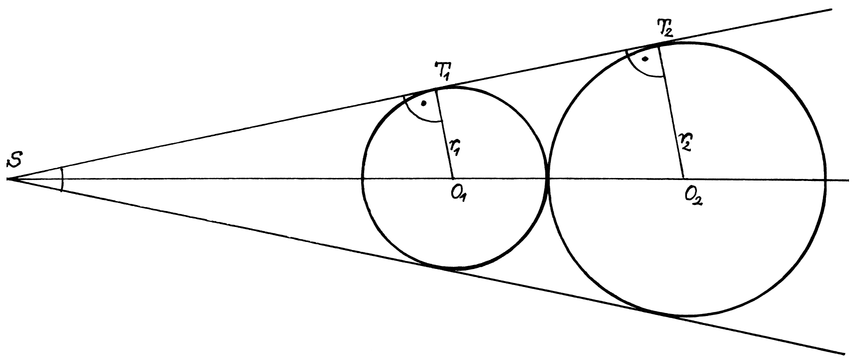
Pozostali kandydaci w przeważającej większości wyznaczali współrzędne punktu P i liczyli długości wszystkich boków trójkąta, podając dla nich przybliżone wartości (przykładowo $\sqrt{48,68} \approx 6,977$) i popełniając przy tym dużo błędów rachunkowych, takich jak $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$ (tego typu błąd pojawiał się dość często),

$$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}x\right)^2} = \frac{1}{4}x^2, \quad \sqrt{(2\text{x-}8)^2} = 2x^2 + 32x + 64.$$

W wielu pracach porównywano współrzędne wektorów $\overrightarrow{AP}$ i $\overrightarrow{A'P}$, i po ustaleniu, że $\overrightarrow{AP} \neq \overrightarrow{A'P}$ wnioskowano: $|AP| \neq |A'P|$. Były również takie prace, w których porównywano każde dwa z trzech wektorów $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{A'P}$ i $\overrightarrow{AA'}$ i z tego, że są różne wyciągano wniosek, że trójkąt nie jest równoramienny. W niektórych pracach kandydaci porównywali tylko boki AA' i AP trójkąta i formułowali wniosek, że trójkąt nie jest równoramienny. Wielu kandydatów stwierdzało: *(...) trójkąt nie jest równoramienny, bo to widać z rysunku.* W kilku pracach źle wyznaczono punkt A' symetryczny do punktu A względem początku układu współrzędnych i źle zaznaczono proste w układzie współrzędnych.

Szkic rozwiązania zadania 7

Z treści zadania wynika, że $|SO_1| = 10$, $|SO_2| = 15$ i $|O_1O_2| = r_1 + r_2$. Stąd $|O_1O_2| = |SO_2| - |SO_1| = 5$ (rys. I.2).



Rysunek I.2

I sposób

Z twierdzenia Talesa zastosowanego do prostych równoległych O_1T_1 i O_2T_2, przecinających ramiona kąta O_2ST_2 (ewentualnie z podobieństwa trójkątów

SO_1T_1 i SO_2T_2) wynika, że $r_1 : r_2 = 2 : 3$. Zatem r_1, r_2 spełniają układ równań:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 5 \\ 3r_1 = 2r_2 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest: $r_1 = 2$, $r_2 = 3$.

II sposób

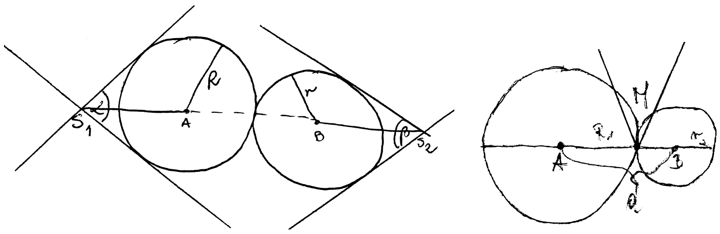
Okrąg o środku O_2 i promieniu r_2 jest obrazem okręgu o środku O_1 i promieniu r_1 w jednokładności o środku S i skali k, gdzie

$$k = \frac{|SO_2|}{|SO_1|} = \frac{3}{2},$$

stąd $r_2 = \frac{3}{2} r_1$, co łącznie z warunkiem $r_1 + r_2 = 5$ daje $r_1 = 2$, $r_2 = 3$.

Błędy występujące w rozwiązaniach zadania 7

— Wielu kandydatów nieprawidłowo rysowało okręgi styczne do ramion kąta ostrego. Ilustruje to rys. I.3.

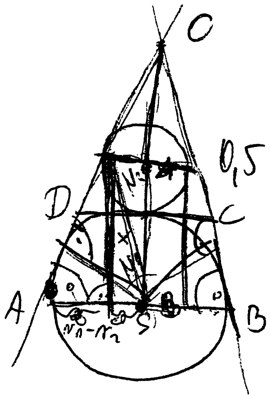


Rysunek I.3

— W rozwiązaniach, w których okręgi zaznaczone były na rysunku jako styczne do obydwu ramion kąta, źle zaznaczano promień okręgu zawierający punkt styczności.

— W większości prac egzaminacyjnych rysunek do zadania wyglądał, jak na rys. I.4.

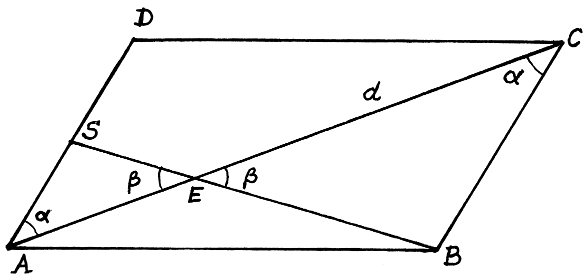
— Pisano, że $|AB| = r_1$, $|CD| = r_2$ i ustalano proporcję $r_1{:}|SB| = r_2{:}|SD|$, na ogół nie podając żadnego uzasadnienia.



Rysunek I.4

Przykładowe rozwiązania zadania 8

Z założenia, że α i β są miarami kątów trójkąta AES wynika, że $\alpha > 0$, $\beta > 0$ i $\alpha + \beta < 180^0$ (rys. I.5).



Rysunek I.5

I sposób rozwiązania

Z przystawania kątów wierzchołkowych i przystawania kątów naprzemianległych wynika podobieństwo trójkątów AES i CEB. Skalą tego podobieństwa jest $s = 2$, stąd $|EC| = 2|AE|$, $|AE| = \frac{1}{3}d$. Oznaczając przez P pole odpowiedniego trójkąta, otrzymujemy

$$P_{\Delta EBC} = P_{\Delta AES} \cdot s^2 = 4P_{\Delta AES}\,.$$

Trójkąty EBC i AEB mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka B, więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości ich podstaw. Czyli $P_{\Delta AEB} = \frac{1}{2}\Delta P_{\Delta EBC} = 2P_{\Delta AES}$. Trójkąt ABC jest sumą mnogościową trójkątów AEB i EBC o rozłącznych wnętrzach, zatem

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ABE} + P_{\Delta EBC} = 6P_{\Delta AES}.$$

Wobec przystawania trójkątów ABC i CDA dających w sumie równoległobok $ABCD$ otrzymujemy

$$P_{ABCD} = 2P_{\Delta ABC} = 12P_{\Delta AES}\,.$$

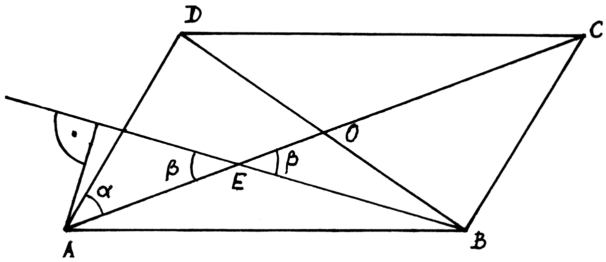
Stosując do trójkąta AES twierdzenie sinusów dostajemy kolejno:

$$|AS| = \frac{d\sin\beta}{3\sin(\alpha+\beta)}, \quad P_{\Delta AES} = \frac{d^2\sin\alpha\sin\beta}{18\sin(\alpha+\beta)}, \quad P_{ABCD} = \frac{2d^2\sin\alpha\sin\beta}{3\sin(\alpha+\beta)}.$$

II sposób rozwiązania

Punkt O przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$ jest środkiem obydwu przekątnych (rys. I.6). Stąd w szczególności $|AO| = \frac{1}{2}d$. W trójkącie ABD, AO i SB są środkowymi, zatem $|AE| = 2|EO|$ oraz $|EB| = 2|SE|$. Trójkąty AEB i ASE mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka A, a stosunek długości ich podstaw jest równy 2, wobec tego

$$P_{\Delta AEB} = 2P_{\Delta ASE} \qquad \text{oraz} \qquad P_{\Delta ABS} = 3P_{\Delta ASE}\,.$$



Rysunek I.6

Trójkąty ABS i SBD mają równe pola, więc $P_{\Delta ABD} = 6P_{\Delta ASE}$. Trójkąty ABD i CDB są przystające, co ostatecznie daje $P_{ABCD} = 12P_{\Delta ASE}$. Pole trójkąta ASE można wyliczyć, jak w sposobie I.

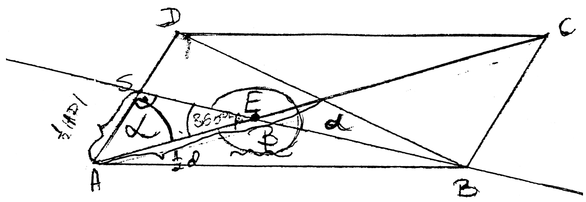
Błędy w rozwiązaniach zadania 8

Najczęściej występujące w rozwiązaniach tego zadania błędy to:

— Niewłaściwe zaznaczanie kąta wypukłego, świadczące o nieznajomości definicji kątów wypukłych i wklęsłych (rys. I.7).

— Identyfikowanie środkowej trójkąta z wysokością trójkąta.

- Stwierdzanie, że przekątne dowolnego równoległoboku mają równe długości i są zawarte w dwusiecznych kątów wewnętrznych tego równoległoboku.
- Stwierdzanie, że sumy długości przeciwległych boków w dowolnym równoległoboku są równe (nieudolne stosowanie twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt).
- Stosowanie błędnych wzorów na pole równoległoboku (np. $P_{ABCD} = |AD|\,|AB| \sin\alpha$, gdzie α to kąt między przekątną równoległoboku i bokiem tego równoległoboku).
- Stosowanie błędnych definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego.



Rysunek I.7

Szkic rozwiązania zadania 9

Z dokładnością do izometrii są dwa nieprzystające do siebie stożki, spełniające warunki zadania. Rysunek I.8. przedstawia przekrój osiowy kuli i obydwu stożków. Oś każdego z tych stożków zawiera środek kuli. Przyjmując, że obydwa mają wspólną oś symetrii i oznaczając przez H_1 długość wysokości jednego stożka, a przez H_2 długość wysokości stożka drugiego, otrzymujemy:

$$H_1 = R + h, \qquad H_2 = R - h,$$

gdzie h jest długością wysokości w trójkącie równobocznym o długości boku R.

Stąd

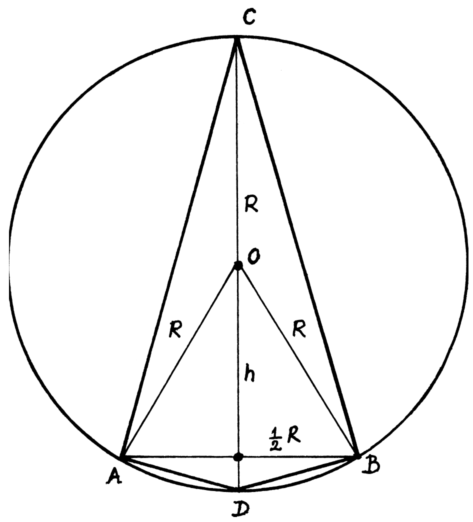
$$H_1 = \frac{(2+\sqrt{3})R}{2}, \qquad H_2 = \frac{(2-\sqrt{3})R}{2}.$$

Objętości tych stożków są odpowiednio równe:

$$V_1 = \frac{(2+\sqrt{3})\pi R^3}{24}, \qquad V_2 = \frac{(2-\sqrt{3})\pi R^3}{24}.$$

Stosunek objętości kuli do objętości każdego z nich wynosi odpowiednio:

$$\frac{V_k}{V_1} = 32(2-\sqrt{3}), \qquad \frac{V_k}{V_2} = 32(2+\sqrt{3}).$$



Rysunek I.8

Błędy w rozwiązaniach zadania 9

— Znaczna liczba kandydatów niewłaściwie wyobrażała sobie stożek wpisany w kulę. Przedstawiano najrozmaitsze rysunki. Przykładowe ilustruje rysunek I.9. Na rysunku I.9e kandydat pomylił pojęcie kuli opisanej na stożku z pojęciem kuli wpisanej w stożek. Twierdził przy tym, że trójkąt KDB jest podobny do trójkąta CDB. Stąd otrzymał proporcję: $R : x = h : l$ i w konsekwencji dalszych przekształceń bezkrytycznie doszedł do wniosku, że objętość kuli jest 16 razy większa od objętości stożka.

— Występuje również takie rozwiązanie, w którym objętość kuli opisanej na stożku jest równa objętości stożka.

— W wielu rozwiązaniach, to samo R jest równocześnie długością promienia kuli i długością promienia podstawy stożka.

— Stosowano błędne wzory na objętość kuli i objętość stożka. Przykładowo:

$$V_k = \frac{4}{3}\pi R^2, \qquad V_k = 4\pi R^3, \qquad V_k = \pi R^3,$$

$$V_{st.} = \frac{1}{3}\pi H, \qquad V_{st.} = \frac{1}{3}\pi r^3 H, \qquad V_{st.} = \frac{1}{2}\pi r^2 H,$$

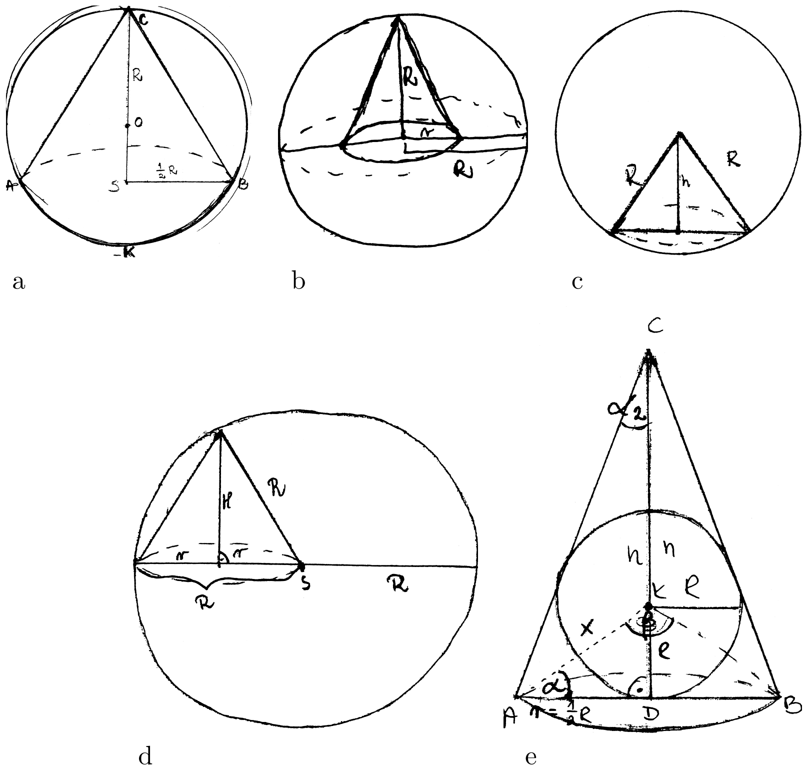
$$V_{st.} = \pi r^2 H.$$

— Wielu kandydatów ograniczało się do wyrażenia stosunku objętości kuli do objętości stożka jako funkcji H albo jako funkcji l, gdzie l to długość tworzącej stożka, nie wyznaczając ani H ani l. W tych rozwiązaniach, w których wyznaczono H i l, otrzymywano niejednokrotnie absurdalne wyniki, na przykład:

$$H = R, \qquad H = 2R, \qquad H = 16R, \qquad H = \frac{3}{2}R,$$

$$H = \frac{3}{4}R, \qquad H = \frac{11}{16}R, \qquad H = \frac{\sqrt{15}}{2}R, \qquad H = \frac{R\sqrt{3}}{3},$$

$$H = \frac{4}{3}R, \qquad l = R, \qquad l = 2R, \qquad l = H + \frac{1}{2}R.$$



Rysunek I.9

— W przedstawianych rachunkach występowało wiele elementarnych błędów takich, jak:

$$R + \frac{\sqrt{3}}{2}R = 1\frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{2\sqrt{3}}{2}R = \sqrt{3}R,$$

$$2 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\sqrt{h^2 + \frac{R^2}{4}} = h + \frac{R}{2} \qquad \text{(ten błąd powtarzał się wiele razy)},$$

$$\pi\frac{R^2}{4}\sqrt{h^2 + \frac{R^2}{4}} = \pi\frac{R^2}{4}\left(h + \frac{R}{2}\right) = \frac{\pi R^2 h}{4} + \frac{R^4\pi}{4},$$

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{4}R^3 + \frac{1}{2}R^2 \cdot x} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2}R^2 \cdot x},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}R + R = \frac{2\sqrt{3}}{2}R.$$

— Podawano niepoprawne definicje funkcji tangens i cotangens kąta ostrego.
— Żaden z kandydatów nie zwrócił uwagi na to, żę zadanie ma dwa rozwiązania.

Przykładowe rozwiązanie zadania 10

Łatwo można uzasadnić, że czworokąt BCS_2S_1 jest prostokątem, stąd $|CS_1| = |BS_2|$ i O jest środkiem odcinków CS_1 i BS_2 (rys. I.10). Oznaczając przez a długość boku sześcianu i stosując do trójkąta BS_1S_1' twierdzenie Pitagorasa otrzymujemy $|BS_1| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Ponieważ $a < \frac{a\sqrt{5}}{2}$, więc kątem ostrym między przekątnymi prostokąta BCS_2S_1 jest kąt BOC. Oznaczając jego miarę przez α, $\cos\alpha$ można wyznaczyć z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta BOC. Wcześniej $|CS_1|$ można wyznaczyć z trójkąta BCS_1 , stosując do niego twierdzenie Pitagorasa. Otrzymuje się kolejno

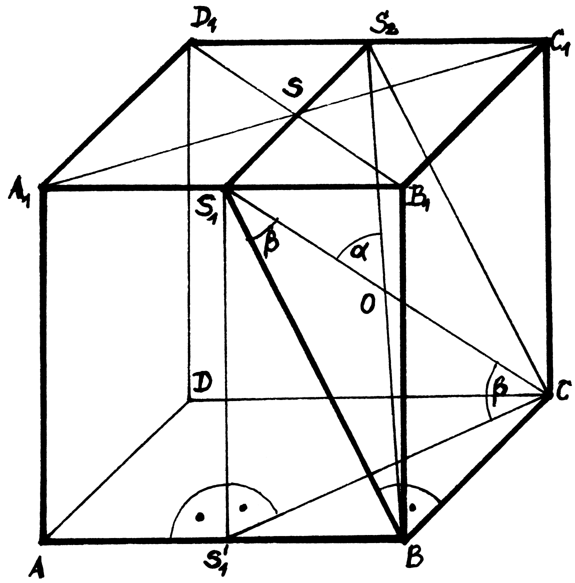
$$|CS_1| = \frac{3}{2}a, \qquad |OC| = \frac{3}{4}a, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{9}.$$

Niech β będzie miarą kąta nachylenia przekątnej CS_1 do płaszczyzny $ABCD$. Łatwo zauważyć, że trójkąt $S_1S_1'C$ przystaje do trójkąta CBS_1 ($|S_1S_1'| = |BC|$ i $|S_1'C| = |BS_1|$). Stąd kąt BS_1C przystaje do kąta $S_1'CS_1$. W trójkącie równoramiennym BS_1O kąt OS_1B przystaje do kąta OBS_1 , a kąt BOC jest kątem zewnętrznym tego trójkąta, więc $2\beta = \alpha$, co daje $\beta = \frac{1}{2}\alpha$. Stosując analogiczne rozumowanie do przekątnej BS_2 prostokąta BCS_2S_1 wnioskujemy, że kąt nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny $ABCD$ przystaje do kąta BS_2C; jego miara jest więc równa $\frac{1}{2}\alpha$.

Kąty o miarach α i β można było również porównać, wyznaczając $\cos\beta$ z trójkąta $CS_1'S_1$. Otrzymuje się wtedy $\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Dla porównania α i β wystarczyło wyznaczyć $\cos 2\beta$:

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = \frac{5}{9} + \frac{5}{9} - 1 = \frac{1}{9}$$

czyli $\cos 2\beta = \cos\alpha$. Ponieważ $0 < \alpha < 90^o$ i $0 < \beta < 90^o$, więc $2\beta = \alpha$.



Rysunek I.10

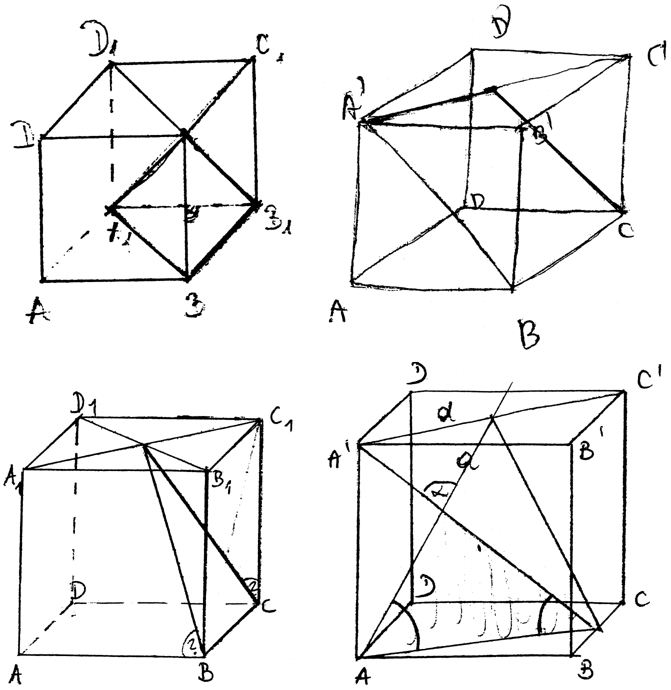
Błędy w rozwiązaniach zadania 10

— W wielu rozwiązaniach źle zaznaczano wielokąt przekroju; w niektórych pracach nie jest to nawet wielokąt płaski. Przykłady ilustruje rysunek I.11.

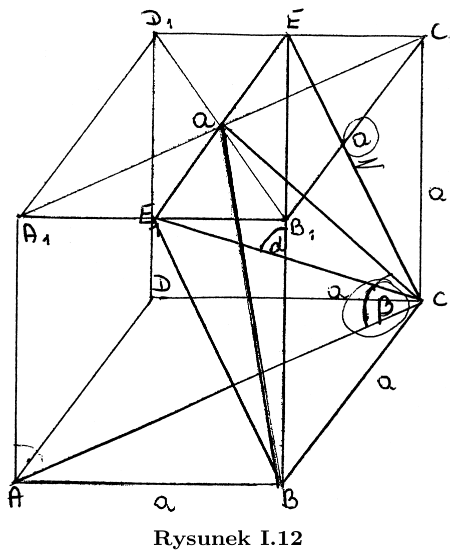
— We wszystkich pracach (za wyjątkiem dwóch) źle zaznaczono kąt pomiędzy przekątną przekroju a płaszczyzną podstawy. W większości był on zaznaczany tak, jak na rys. I.12.

— W niektórych pracach zamiast kąta między przekątnymi przekroju, zaznaczono kąt między przekątnymi sześcianu (w kilku pracach twierdzono, że jest to kąt prosty).

— W żadnej pracy nie mówi się nic o kącie między drugą przekątną przekroju a płaszczyzną podstawy sześcianu.



Rysunek I.11



Rysunek I.12

Wnioski

Analiza błędów w rozwiązywanych zadaniach z geometrii, popełnionych przez kandydatów, którzy egzaminu nie zdali, doprowadza do jednoznacznego wniosku, że stan ich wiedzy geometrycznej był przerażająco niski.

Stwierdza się:

1. Nieznajomość podstawowych twierdzeń planimetrii i stereometrii.
2. Brak wyobraźni przestrzennej; nieodróżnianie prostych skośnych od prostych zawartych w jednej płaszczyźnie, błędne zaznaczanie kąta między prostą a płaszczyzną.
3. Mechaniczne i bezmyślne stosowanie wyuczonych wzorów i reguł.
4. Niesprawdzanie przy stosowaniu twierdzeń, czy w określonej sytuacji spełnione są ich założenia.
5. Brak uzasadnień.
6. Nieumiejętność przeprowadzania nawet krótkiego rozumowania.
7. Niedostrzeganie związków zachodzących pomiędzy danymi figurami, niezwracanie uwagi na symetryczność figur, niedostrzeganie trójkątów przystających oraz trójkątów podobnych.
8. Nieznajomość zależności pomiędzy bokami i kątami tego samego trójkąta i różnych trójkątów, własności środkowych w trójkącie i własności przekątnych w równoległoboku, warunku na styczność prostej do okręgu, pojęcia kątów wypukłych i wklęsłych.
9. Utożsamianie wektora z jego długością.
10. Stosowanie błędnych definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego.
11. Brak refleksji nad otrzymywanymi wynikami.

Część II. Rekrutacja na kierunek matematyka w czerwcu 2004 roku

Lista zadań na egzamin wstępny na studia dzienne na rok akademicki 2004/2005 zawierała 4 zadania z geometrii. Były to:

Zadanie 4 (10 punktów)
W okrąg o promieniu długości r wpisano trapez równoramienny, którego wysokość ma długość równą $\frac{1}{2}r$, a kąt ostry trapezu ma miarę 45^o.

1. *Uzasadnić, że przekątna tego trapezu ma długość $r\sqrt{2}$.*
2. *Wyznaczyć długości boków tego trapezu.*
3. *Wyznaczyć odległość środka okręgu od dłuższej podstawy trapezu.*

Zadanie 5 (10 punktów)
Dany jest okrąg $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ *i punkt* $A = (2, 0)$.

1. *Napisać równanie prostej* AS*, gdzie* S *jest środkiem tego okręgu, zawierającej średnicę* AB.
2. *Na jednym z półokręgów o końcach* AB *wyznaczyć współrzędne punktu* C *takiego, że stosunek długości łuków* AC *do* CB *wynosi* 1:2.

Zadanie 6 (10 punktów)
Dany jest trójkąt ABC *o polu* S. *Punkty* B, C *przekształcono przez symetrię względem punktu* A *otrzymując punkty* B', C', *punkty* A, C *przekształcono przez symetrię względem punktu* B *– ich obrazy to odpowiednio punkty* A', C'', *natomiast punkty* A, B *przekształcono przez symetrię względem punktu* C *otrzymując punkty* A'' *i* B''.

1. *Wyznaczyć pole sześciokąta* $A'A''B''B'C'C''$.
2. *Jakie pole będzie miał sześciokąt otrzymany z trójkąta* ABC *w podobny sposób, lecz nie przez odpowiednie symetrie środkowe, a przez jednokładności o środkach w punktach* A, B, C *i skalach* $s = -n$*, gdzie* n *jest liczbą naturalną większą od* 1.

Zadanie 7 (10 punktów)
W ostrosłupie czworokątnym wszystkie krawędzie boczne mają długość l *oraz każdy z kątów płaskich przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę* 2α.

1. *Wyznaczyć objętość tego ostrosłupa.*
2. *Zbadać, czy kąty pomiędzy sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa są ostre, proste, czy rozwarte.*

Do egzaminu wstępnego z matematyki w czerwcu 2004 r. przystąpiło 335 kandydatów. Egzamin zdało 187, wśród nich 46 kandydatów otrzymało ze wszystkich zadań łącznie powyżej 50 punktów.

Poniższe tabele przedstawiają liczby punktów z poszczególnych zadań z geometrii uzyskanych przez kandydatów, którzy egzamin zdali.

Tabela II.2. Zadanie 4 (planimetria) – liczba kandydatów uzyskujących daną liczbę punktów

Liczba punktów										
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
14 (9)	9 (7)	15 (7)	17 (6)	14 (2)	15 (2)	11 (2)	18 (3)	40 (5)	21 (1)	13 (2)

Tabela II.3. Zadanie 5 (geometria analityczna) – liczba kandydatów uzyskujących daną liczbę punktów

Liczba punktów										
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
50 (24)	14 (9)	14 (3)	13 (2)	4 (0)	14 (3)	59 (6)	8 (0)	5 (0)	5 (1)	1 (0)

Tabela II.4. Zadanie 6 (planimetria – przekształcenia geometryczne) – liczba kandydatów uzyskujących daną liczbę punktów

Liczba punktów										
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
4 (3)	0 (0)	1 (1)	4 (4)	4 (1)	23 (12)	12 (6)	13 (2)	17 (4)	47 (9)	62 (5)

Tabela II.5. Zadanie 7 (stereometria) – liczba kandydatów uzyskujących daną liczbę punktów

Liczba punktów										
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
2 (2)	9 (7)	11 (7)	10 (4)	8 (2)	39 (10)	38 (7)	17 (2)	18 (3)	13 (2)	22 (1)

Objaśnienie: W nawiasach podano liczby tych kandydatów otrzymujących ze wskazanego zadania daną liczbę punktów, którzy w łącznej klasyfikacji ze wszystkich zadań uzyskali powyżej 50 punktów. Z tej grupy kandydatów 8 otrzymało 0 punktów z jednego z wymienionych zadań geometrycznych.

Dla porównania, w tabelach poniżej podano liczby punktów z zadań 6 i 7 otrzymanych przez kandydatów, którzy te zadania rozwiązywali, lecz egzaminu wstępnego nie zdali.

Tabela II.6. Zadanie 6 – liczba kandydatów uzyskujących daną liczbę punktów

Liczba punktów											Razem
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
–	–	–	–	–	1	–	6	19	42	47	115

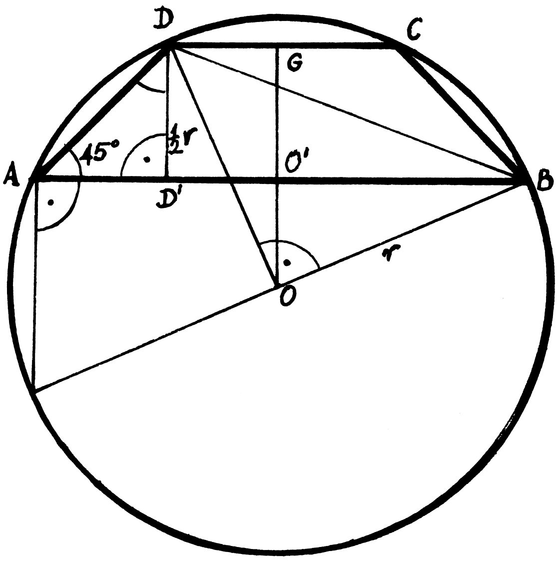
Tabela II.7. Zadanie 7 – liczba kandydatów uzyskujących daną liczbę punktów

Liczba punktów											Razem
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
–	–	–	–	2	7	26	10	21	28	22	116

Później (podobnie jak w części I artykułu) podano propozycje rozwiązań wymienionych zadań, oraz wskazano błędy, jakie najczęściej popełniali kandydaci rozwiązując te zadania.

Szkic rozwiązania zadania 4

a) Uzasadnienie tezy sformułowanej w podpunkcie a) wynika wprost z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym w okrąg, opartych na tym samym łuku, zastosowanego do kątów DAB i DOB (rys. II.1). Wynika z niego, że kąt DOB jest kątem prostym. Stąd DB jest przekątną w kwadracie o długości boku równej r, zatem $|DB| = r\sqrt{2}$. Inne uzasadnienie można było otrzymać, stosując do trójkąta ABD twierdzenie sinusów. Wynika z niego, że $\frac{|DB|}{\sin 45°} = 2r$, stąd $|DB| = r\sqrt{2}$.



Rysunek II.1

b) Trójkąt ADD' jest równoramiennym trójkątem prostokątnym, więc AD jest przekątną kwadratu o długości boku równej $\frac{1}{2}r$, czyli $|AD| = |BC| =$

$\frac{r\sqrt{2}}{2}$. Długość boku AB trapezu można wyznaczyć z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta ABD albo z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta $DD'B$, lub z twierdzenia Ptolemeusza zastosowanego do trapezu $ABCD$ wpisanego w okrąg o środku O i promieniu długości r. W wyniku elementarnych przekształceń otrzymuje się w każdym przypadku $|AB| = \frac{1}{2}r(\sqrt{7}+1)$, $|DC| = |AB| - r = \frac{1}{2}r(\sqrt{7}-1)$.

c) Odległość punktów O, O' można było wyznaczyć bądź z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta $OO'B$; skąd $|OO'| = \frac{1}{4}r(\sqrt{7}-1)$, albo można było zauważyć, że trójkąty DGO i $OO'B$ są przystające, gdyż ramiona obydwu są zawarte w prostych odpowiednio prostopadłych, a $|OD| = |OB| = r$. Stąd natychmiast wynika, że $|OO'| = |DG| = \frac{1}{2}|DC| = \frac{1}{4}r(\sqrt{7}-1)$.

Błędy występujące w rozwiązaniach zadania 4

Zadanie 4 rozwiązywało 174 kandydatów (spośród 187). Przedstawiane w rozwiązywanych zadaniach rysunki w wielu przypadkach były błędne.

Na przykład:

— Przyjmowano w nich, że dłuższa podstawa trapezu jest średnicą okręgu.

— Środek okręgu zaznaczano wewnątrz trapezu.

— Krótsza podstawa trapezu nie była cięciwą okręgu.

— W kilku przypadkach wobec trudności związanych z umieszczeniem trapezu w okręgu rysowano sam trapez (bez okręgu).

Jeden z kandydatów próbował nawet uzasadnić, że dłuższa podstawa trapezu jest średnicą okręgu (rys. II.2a).

Oznaczając przez K punkt wspólny prostych zawierających ramiona trapezu zauważał (słusznie), że trójkąt ABK jest trójkątem prostokątnym z kątem prostym przy wierzchołku K, stąd dalej wnioskował, że AB musi być średnicą okręgu i wobec tego kąt ADB również musi być kątem prostym. Jak widać, nawet rysunek nie sugerował kandydatowi błędu w jego rozumowaniu wynikającego z faktu, że w tym przypadku kąt AKB nie może być kątem wpisanym w dany okrąg.

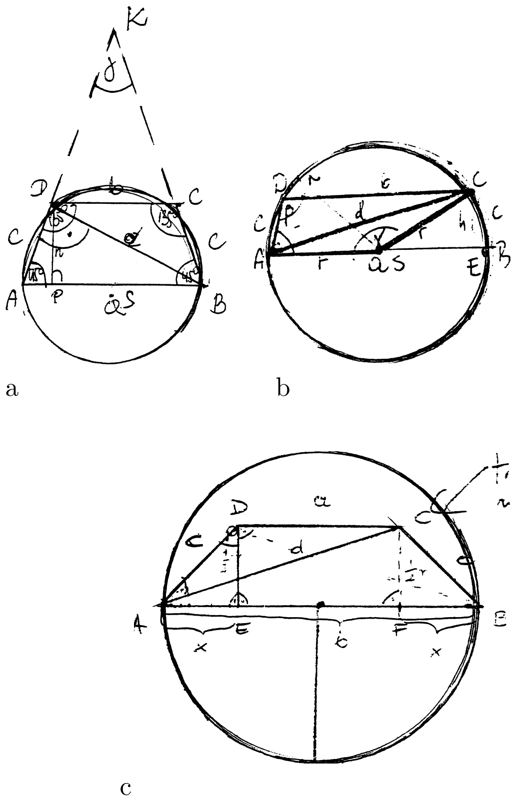
Większość kandydatów nie rozumiała polecenia podpunktu a). Jedynie uzasadnienie podane przez 18 kandydatów można było uznać za wystarczające. Z pozostałych kandydatów, 17 podjęło próby uzasadnienia, że przekątna trapezu ma długość $r\sqrt{2}$, ale ich rozumowania zawierają błędy.

Oto przykłady błędnych rozumowań:

— Przyjmując oznaczenia jak na rysunku II.2.b. i zakładając, że AB jest średnicą okręgu, kandydat stwierdzał, że kąt ASC jest kątem prostym, stąd otrzymał $d = r\sqrt{2}$. Nie zauważył jednak, że w takim przypadku punkt D musiałby się pokryć z punktem C i figura $ABCD$ nie byłaby trapezem, lecz trójkątem.

— Inny kandydat stwierdzał, że aby przekątna miała długość $d = r\sqrt{2}$ musiałby zachodzić warunek $d^2 = |AF|^2 + |CF|^2$ (rys. II.2c). Dalej przyjął, że $|AF| = \frac{3}{2}r$ i w efekcie otrzymał $d = \frac{1}{2}r\sqrt{10}$. Z tego wyciągnął wniosek, że długość przekątnej trapezu nie wynosi $r\sqrt{2}$.

— Do sprzecznego wyniku doszedł również kandydat, który zakładając, że $|AB| = 2r$ wyznaczył d z trójkąta prostokątnego ADB i otrzymał w ten sposób $d = \frac{1}{2}r\sqrt{14}$. Nie wyciągnął stąd jednak żadnego wniosku.



Rysunek II.2

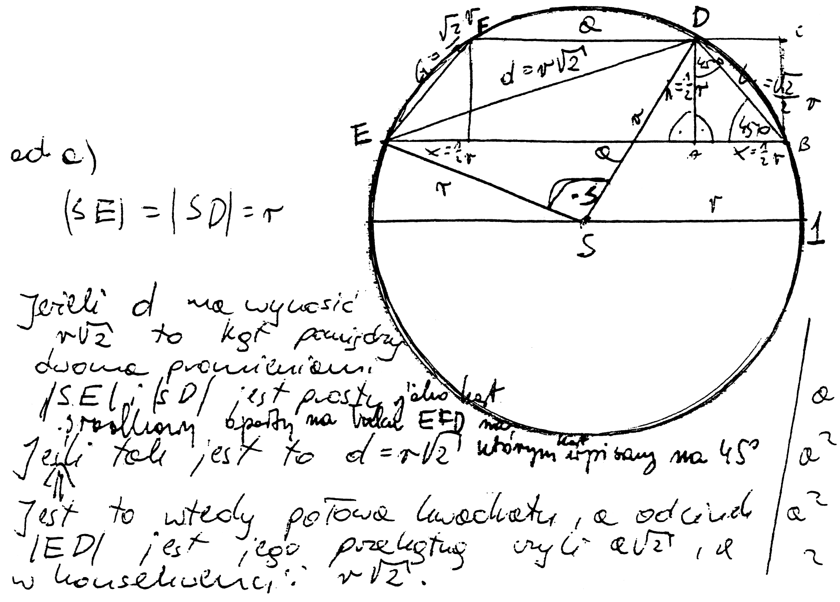
— Po wyznaczeniu zależności pomiędzy podstawami trapezu ($a = b + r$, gdzie a jest długością dłuższej podstawy, b – długością krótszej podstawy trapezu) kandydat zastosował twierdzenie cosinusów do trójkątów DBC i ADB, w których przyjął, że $d = r\sqrt{2}$. W obydwu przypadkach otrzymał $2r^2 = \frac{1}{2}r^2 + b^2 + br$ i dalej rozumował tak: *(...) skoro* $2r^2 = 2r^2$*, więc* $r\sqrt{2}$ *jest długością przekątnej trapezu.*

— Oznaczając wierzchołki trapezu, jak na rysunku II.3. kandydat napisał: *(...) jeżeli d ma wynosić $r\sqrt{2}$, to kąt pomiędzy dwoma promieniami SE i SD jest prosty. Jeśli tak jest, to* $d = r\sqrt{2}$. Wynika stąd, że kandydat nie ma pewności, czy tak jest naprawdę i nie umie tego uzasadnić.

Były również takie stwierdzenia:

— *(...) przekątna trapezu może mieć wartość $r\sqrt{2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy środek O (tj. środek okręgu) będzie środkiem odcinka AB*,

— *(...) przyjmując konkretne liczby za dane (np. $r = 2$, $h = 1$) można udowodnić, że długość przekątnej jest równa $r\sqrt{2}$.* Takiego sprawdzenia jednak brak.



Rysunek II.3

Część kandydatów starała się najpierw wyznaczyć długości boków trapezu, a dopiero potem długość jego przekątnej. Popełniano przy tym szereg błędów, zarówno rachunkowych, jak również wynikłych ze stosowania błędnych twierdzeń, na przykład korzystano z warunku koniecznego na to, aby w trapez można było wpisać okrąg, a nie opisać na nim okrąg, albo przyjmowano (bez uzasadnienia), że górna podstawa trapezu ma długość równą długości jego ramienia. Gdy otrzymany wynik na d nie zgadzał się z podanym w treści zadania, nie wzbudzało to żadnego zaniepokojenia, że rozumowanie jest błędne.

Występowały również błędy wynikające z kolizji oznaczeń, na przykład w jednym rozwiązaniu przez d oznaczano zarówno długość przekątnej trapezu, jak również długość jego ramienia. Większość kandydatów przyjmowała, że $d = r\sqrt{2}$ jest wielkością daną i wykorzystywała ją w dalszych obliczeniach.

Podpunkty b), c) były tylko rachunkowe. Wykorzystywano w nich definicje funkcji trygonometrycznych, twierdzenia: sinusów, cosinusów, Pitagorasa i ewentualnie twierdzenie Ptolemeusza. Na ogół przytaczano je poprawnie, ale zdarzały się błędne definicje funkcji cosinus, elementarne błędy rachunkowe (np.: z równości $c^2 = a^2 + b^2$ wyciągano wniosek, że $c = a + b$), błędy w przekształceniach algebraicznych, które niejednokrotnie doprowadzały do absurdalnych stwierdzeń, takich jak $r = 0$, $b < 0$. Mimo to nie skłaniały one kandydata do refleksji nad otrzymanym wynikiem.

Zauważyć również można, że przed rozwiązaniem zadania kandydaci nie zastanawiali się nad wyborem jak najkrótszej drogi rozumowania. Najczęściej wybierali długą drogę rachunkową, popełniając przy tym szereg błędów, gdy tymczasem rozwiązanie było prawie natychmiastowe. Na przykład, przy wyznaczaniu długości ramion trapezu, bardzo wielu kandydatów nie zauważało, że rzutując wierzchołek D trapezu na prostą AB otrzymuje się równoramienny trójkąt prostokątny, którego ramiona mają tę samą długość równą $\frac{1}{2}r$, zaś podstawa ma długość $c = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$. Tymczasem wyznaczali oni drugie ramię powstałego trójkąta i bok $AD = c$ funkcjami trygonometrycznymi, twierdzeniem Pitagorasa, a nawet twierdzeniem cosinusów.

Odległość środka okręgu od prostej AB kandydaci w większości liczyli za pomocą twierdzenia Pitagorasa. Niejednokrotnie wynik nie był poprawny, bo był konsekwencją błędnych wyników otrzymanych wcześniej. Tylko jeden z kandydatów podejrzewał, że trójkąt $OO'B$ jest podobny do trójkąta DGO. Oznaczając przez H rzut prostokątny punktu O na prostą AB, pisał on: *(...) to należałoby udowodnić* (chodzi o podobieństwo wymienionych trójkątów – przyp. autora)*, bo gdyby to było prawdą, to byłoby* $|OH| = \frac{1}{2}|CD|$. Dowodu jednak nie podał.

Przykładowe rozwiązania zadania 5

Przekształcając równanie $x^2+y^2-4x-4y+4 = 0$ otrzymuje się równoważną postać $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$, z której można odczytać współrzędne środka S okręgu i długość jego promienia: $S = (2, 2)$, $r = 2$. Prosta AS jest równoległa do osi y i ma równanie $x = 2$ (rys. II.4). Niech ϕ oznacza miarę stopniową kąta ASC. Wtedy z zależności między kątami środkowymi w okręgu i łukami, na których są one oparte, oraz z treści zadania wynika, że stosunek długości łuków AC do BC jest równy stosunkowi miar kątów ASC do CSB, czyli $\phi{:}(180^\circ - \phi) = 1 : 2$, stąd $\phi = 60^\circ$.

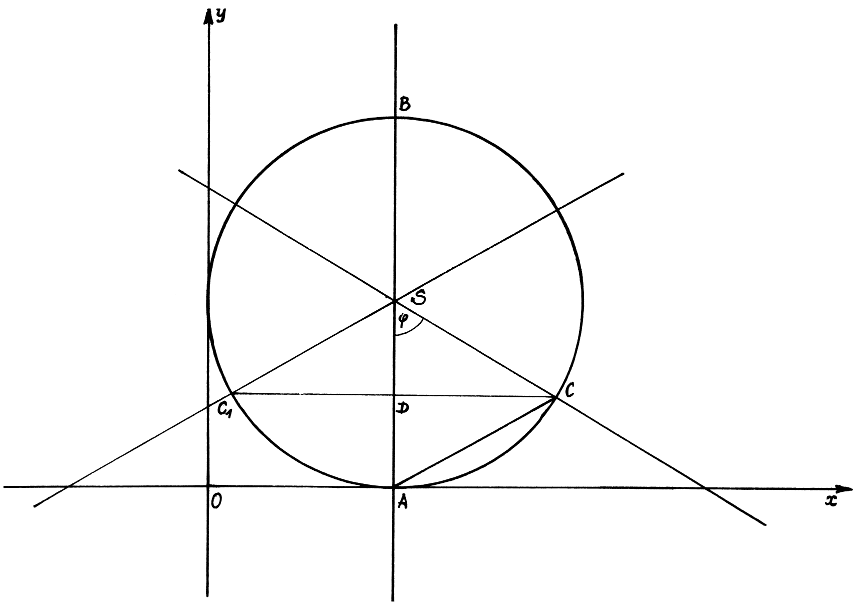
Dalsze rozumowanie można było przeprowadzić różnymi sposobami. Na przykład:

I sposób

Trójkąt ASC, jak łatwo zauważyć, jest trójkątem równobocznym o długości boku równej 2. Wysokość tego trójkąta ma długość $\sqrt{3}$. Odcięta punktu C wynosi więc $2+\sqrt{3}$ (albo $2-\sqrt{3}$, w zależności od wybranego półokręgu o końcach A, B). Wysokość w trójkącie równobocznym jest równocześnie środkową, stąd punkt D, będący spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C jest środkiem odcinka AS, zatem rzędna punktu C wynosi 1. Ostatecznie punkt C ma współrzędne $(2+\sqrt{3}, 1)$ (albo $(2-\sqrt{3}, 1)$).

II sposób

Oznaczając (jak w sposobie I) przez D rzut prostokątny punktu C na prostą AS otrzymujemy trójkąt prostokątny SDC, w którym $|SD| = 2\cos 60^\circ = 1$, $|DC| = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3}$. Stąd punkt C ma współrzędne $(2+\sqrt{3}, 1)$ albo $(2-\sqrt{3}, 1)$. Obydwa te punkty są symetryczne względem prostej AS.



Rysunek II.4

III sposób (analityczny, najdłuższy)

Polega on na napisaniu równania kierunkowego prostej CS i wyznaczeniu tego z dwóch punktów wspólnych prostej z okręgiem, dla którego stosunek długości łuków AC do CB jest równy 1 : 2. Kąt nachylenia prostej CS do osi

x ma miarę 150° (albo 30°). Prosta CS ma więc równanie $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2$ (albo $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2$). Współrzędne punktu C otrzymuje się rozwiązując następujący układ

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} + 2 \\ y < 2 \end{cases} \quad \text{(albo} \quad \begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} + 2 \\ y < 2 \end{cases} \text{)}.$$

Rozwiązaniem jest $(x, y) = (2 + \sqrt{3}, 1)$ (albo $(x, y) = (2 - \sqrt{3}, 1)$). Czyli $C = (2 + \sqrt{3}, 1)$ (albo $C_1 = (2 - \sqrt{3}, 1)$. Punkt C_1 jest symetryczny do punktu C względem prostej $x = 2$).

Błędy występujące w rozwiązaniach zadania 5

Zadanie 5 rozwiązywało 186 kandydatów, w tym 50 otrzymało maksymalną liczbę 10 punktów. Wszyscy kandydaci poprawnie wyznaczali środek i promień danego okręgu.

Pierwsze błędy pojawiały się przy pisaniu równania prostej AS. Znaczna liczba kandydatów chciała napisać równanie kierunkowe tej prostej, lecz wówczas w mianowniku współczynnika kierunkowego tej prostej pojawiało się zero. Po otrzymaniu takiej postaci, komentarze były najrozmaitsze. Tylko jeden z kandydatów stwierdził, że nie da się napisać równania kierunkowego tej prostej, ale innego równania prostej AS nie podał. Wnioskowania pozostałych kandydatów były błędne. Na przykład kandydat rozumował tak: *(...) skoro* $y = \frac{2}{0}(x-2)$, *to* $y = 0 \cdot (x-2)$, *więc* $x = 2$.

— Inny kandydat współczynnik kierunkowy prostej o równaniu $y - y_A = a(x - x_A)$ liczył następująco: *(...)* $a = \frac{y_A - y_S}{x_A - x_S} = \frac{0-2}{2-2} = -2$ (czyli opuszczał zero w mianowniku i pisał, że iloraz jest równy licznikowi).

— Podobnie wnioskował kandydat, pisząc implikację $y - 0 = \frac{2-0}{2-2}(x-2) \Rightarrow y = 2(x-2)$.

— Inny kandydat po napisaniu równania $y - 0 = \frac{2-0}{2-2}(x-2)$, nie wiedząc, jak postąpić dalej, napisał równanie typu $y = ax + b$, wstawił do niego współrzędne punktu S, przyjął $b = 2$ i stwierdził, że $y = 2$ jest równaniem prostej AS.

— Wśród rozwiązań innych kandydatów można znaleźć również takie implikacje:

$$\frac{0-2}{2-2} = \frac{y-2}{x-2} \Rightarrow -2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$$y - 0 = \frac{2-0}{2-2}(x-2) \Rightarrow y = 0.$$

$$y - 2 = \frac{0-2}{2-2}(x-2) \Rightarrow x = 2.$$

— Jeden z kandydatów, chcąc napisać równanie kierunkowe prostej, otrzymał układ sprzeczny i doszedł do następującego wniosku: *(...) nie istnieje taka prosta, która by przechodziła przez punkty A, S*. Inni w podobnej sytuacji pozostawiali ten układ bez żadnego komentarza i pisali, że równaniem prostej AS jest $x = 2$ albo, że $y = 2$ (nie podając żadnego uzasadnienia). Tylko w jednym przypadku kandydat zauważając, że w równaniu $y = \frac{y_S - y_A}{x_S - x_A}(x - x_A) + y_A$ po podstawieniu $x_S = x_A = 2$ w mianowniku pojawiłoby się zero, napisał równanie $x = \frac{x_S - x_A}{y_S - y_A}(y - y_A) + x_A$ i otrzymał $x = 2$.

Drugim, poważnym, powtarzającym się często błędem w rozwiązaniach tego zadania było utożsamianie stosunku długości łuków okręgów ze stosunkiem długości odpowiednich cięciw. Kandydaci twierdzili, że stosunek długości łuków AC do BC jest równy stosunkowi długości odcinków AC do BC. W jednym nawet przypadku kandydat pisał, że długości łuków AC i BC są równe długościom odpowiednich odcinków o końcach AC i BC. Są też takie prace, w których kandydaci pisali, że *(...) stosunek długości łuków AC do BC jest równy stosunkowi wektorów:* $\overrightarrow{AC}$ *i* $\overrightarrow{BC}$, a z otrzymanej równości $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$ wyznaczali współrzędne punktu C.

Występowały również błędy w rachunku wektorowym. Na przykład kandydat pisał, że $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}$, a z koniunkcji warunków:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \\ |\overrightarrow{CB}| = 2|\overrightarrow{AC}| \end{cases}$$

wnioskował, że $3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}$.

Zdarzały się również błędy w definicjach funkcji trygonometrycznych kąta ostrego.

Zauważyć można również elementarne błędy w przekształceniach algebraicznych. Przykład:

$$\frac{(x-2)^2 + y^2}{(2-x)^2 + (4-y)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4y^2 = (4-y)^2.$$

Niewielu kandydatów zauważało bardzo proste rozwiązanie tego zadania. Większość rozwiązywała niejednokrotnie skomplikowane układy równań, dość często popełniając błędy rachunkowe, prowadzące do sprzecznych wyników. Brak przy tym było krytycznego spojrzenia kandydata na otrzymane wyniki. Oto przykłady:

— Każdy z punktów A, B, C choć są różne i poprawnie zaznaczone na rysunku, w rozwiązaniu zadania ma takie same współrzędne $(2, 0)$.

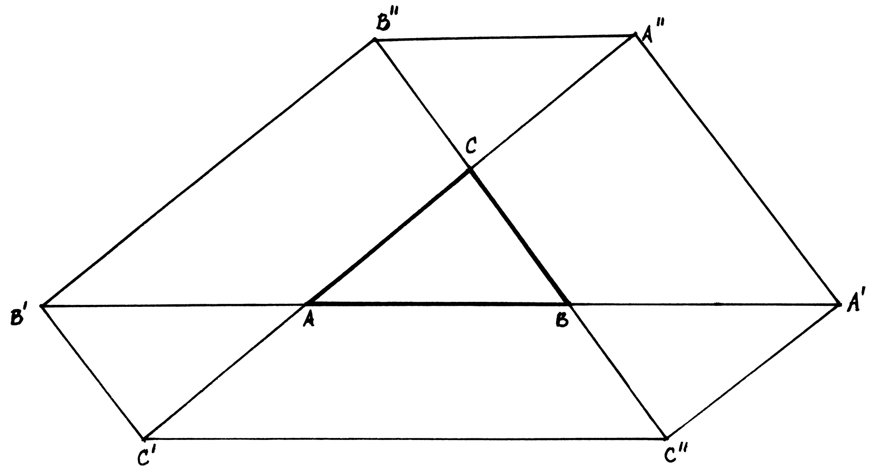
— Punkt C, który ma należeć do okręgu, ma takie same współrzędne jak środek okręgu, albo jest środkiem półokręgu (ma dzielić ten półokrąg w stosunku $1 : 2$), albo w ogóle nie należy do okręgu.

— Ta sama prosta raz ma równanie $x = 2$, drugi raz $y = 0$.
— Na rysunku widać, że punkty A, B, C nie należą do jednej prostej, a kandydat pisze, że $3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}$.

Przykładowe rozwiązania zadania 6

I sposób

Jak łatwo zauważyć z rysunku sześciokąt $A'A''B''B'C'C''$ jest sumą czterech trójkątów i trzech czworokątów o rozłącznych wnętrzach, jego pole jest więc sumą pól tych wielokątów (rys. II.5).



Rysunek II.5

a) Trójkąty: $AB'C'$, $BC''A'$, $CA''B''$ są obrazami trójkąta ABC w symetriach o środkach odpowiednio w punktach A, B, C, zatem pole każdego z wymienionych trójkątów jest równe S. Z definicji symetrii środkowej wynika, że A jest środkiem odcinków BB' i CC', B – środkiem odcinków AA' i CC'', a C – środkiem odcinków AA'' i BB''. Stąd i z twierdzenia o prostej przechodzącej przez środki dwóch boków trójkąta (ewentualnie z twierdzenia Talesa) wynika, że trójkąt ABC jest podobny do trójkątów $C'C''C$, $AA'A''$ i $B'BB''$. Skalą każdego z tych podobieństw jest $s = 2$, więc pole każdego z trójkątów $C'C''C$, $AA'A''$ i $B'BB''$ jest równe $4S$. Tym samym pole każdego z czworokątów: $C'C''BA$, $BA'A''C$, $B'ACB''$, które w tym przypadku są trapezami wynosi $3S$. Zatem pole sześciokąta $A'A''B''B'C'C''$ jest równe $4S + 9S = 13S$.

Uwaga: Trójkąty: $C'C''C$, $A'A''A$ i $B'BB''$ można również potraktować jako obrazy trójkąta ABC w jednokładnościach o środkach odpowiednio w punktach C, A, B i skalach $s = 2$, natomiast trójkąty: $AB'C'$, $BC''A'$, $CA''B''$ są obrazami trójkąta ABC w jednokładnościach o środkach odpowiednio w punktach A, B, C i skalach $s = -1$.

b) Jeżeli $s = -n$, gdzie n jest liczbą naturalną i $n > 1$, to stosując oznaczenia jak w podpunkcie a) i wykorzystując uwagę z tego podpunktu oraz własności jednokładności wnioskujemy, że pole każdego z trójkątów: $AB'C'$, $BC''A'$ i $CA''B''$ będzie równe $n^2 \cdot S$, natomiast każdy z trójkątów $CC'C''$, $AA'A''$, $BB''B'$ będzie miał pole równe $(n+1)^2 \cdot S$. Wynika to z tego, że każdy z wymienionych trójkątów jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku odpowiednio w punkcie C, A, B i skali $s = n+1$. Pole każdego z trapezów: $C'C''BA$, $A'A''CB$, $B''B'AC$ jest więc równe $(n+1)^2S - S = n(n+2)S$, a pole sześciokąta $A'A''B''B'C'C''$: $S + 3n^2S + 3n(n+2)S = (6n^2+6n+1)S$.

Uwaga: Otrzymany w tym podpunkcie wzór na pole skonstruowanego w zadaniu sześciokąta jest uogólnieniem wzoru otrzymanego w podpunkcie a), gdyż dla $n = 1$ $(6n^2+6n+1)S = 13S$.

II sposób

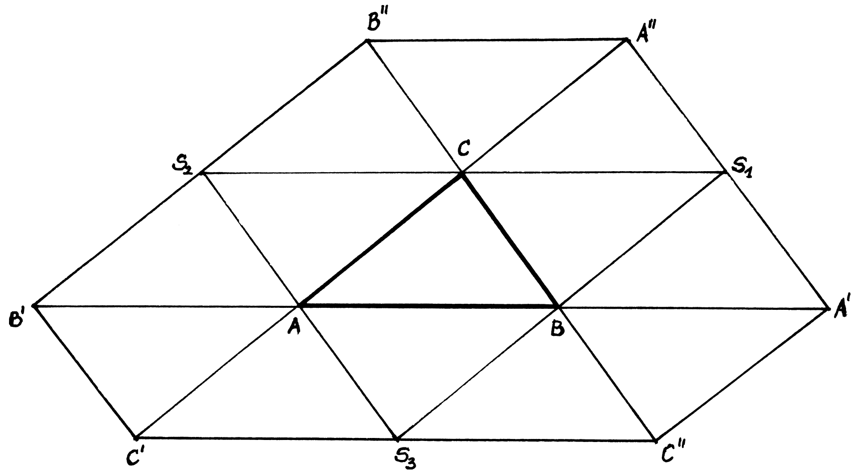
a) Oznaczając przez S_1 środek odcinka $A'A''$, przez S_2 – środek odcinka $B'B''$, a przez S_3 – środek $C'C''$ i korzystając z twierdzenia o odcinku, którego końcami są środki dwóch boków trójkąta, można zauważyć, że każdy z trapezów: $C'C''BA$, $A'A''CB$, $B''B'AC$ jest sumą trzech trójkątów przystających do trójkąta ABC (rys. II.6). Pozostałe trzy trójkąty: $AB'C'$, $BC''A'$, $CA''B''$ także przystają do tego trójkąta. Tak więc sześciokąt $A'A''B''B'C'C''$ jest sumą 13 trójkątów o rozłącznych wnętrzach, przystających do trójkąta ABC, czyli pole tego sześciokąta jest równe $13S$.

b) Niech F_1 oznacza sześciokąt $A'A''B''B'C'C''$, $\overline{F_1}$ – figurę, która jest różnicą sześciokąta F_1 i trójkąta ABC. Trójkąt ten oznaczymy teraz przez F_0 . Wówczas pole $\overline{F_1}$ jest równe $12S$. Oznaczając przez A'_n, A''_n, B''_n, B'_n, C_n', C''_n wierzchołki sześciokąta F_n otrzymanego z trójkąta ABC w wyniku odpowiednich jednokładności o środkach A, B, C i skalach $s = -n$ dla n naturalnego i $n \geqslant 2$, a przez $\overline{F_n}$ figurę będącą różnicą sześciokąta $A'_nA''_nB''_nB'_nC'_nC''_n$ i sześciokąta $A'_{n-1}A''_{n-1}B''_{n-1}B'_{n-1}C'_{n-1}C''_{n-1}$ można wykazać, że dla każdego $n \geqslant 1$ $\overline{F_n}$ jest sumą $12n$ trójkątów przystających do trójkąta ABC (uwaga: w przypadku $n = 1$ przyjmuje się, że figura $A'_0A''_0B''_0B'_0C'_0C_0$" jest trójkątem F_0). Dowód można przeprowadzić metodą indukcji matematycznej. Można bowiem stwierdzić, że:

1°. Dla $n = 1$ $\overline{F_1}$ jest sumą 12 trójkątów przystających do trójkąta ABC.

2°. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$: jeżeli figura $\overline{F_n}$ jest sumą $12n$ trójkątów przystających do trójkąta ABC, to figura $\overline{F_{n+1}}$ jest sumą $12n + 6 \cdot 2 = 12(n + 1)$ trójkątów przystających do ABC.

Z 1° i 2° wynika, że dla dowolnego $n \geqslant 1$ $\overline{F_n}$ jest sumą $12n$ trójkątów przystających do F_0. Z przeprowadzonego rozumowania można również wywnioskować, że pola figur $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \ldots, \overline{F_n}$ tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 12S$. Oznaczając przez a_n pole figury $\overline{F_n}$ otrzymuje się: dla każdego n naturalnego $a_n = 12nS$. Stosując wzór na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 12S$ i $r = 12S$ wyznaczyć można pole sześciokąta F_n. Ostatecznie: pole $F_n = S+\frac{1}{2}n(12S+12nS) = (6n^2+6n+1)S$.

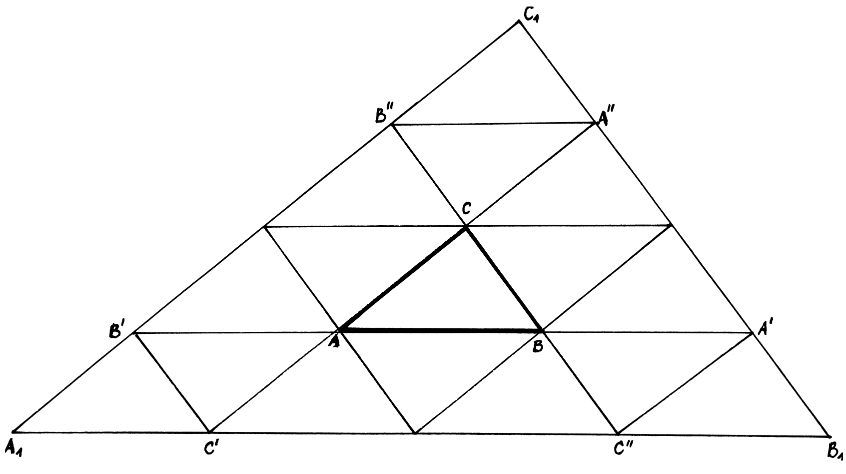


Rysunek II.6

III sposób

a) Wyznaczając punkty przecięcia prostych $C'C''$, $A'A''$, i $B'B''$ otrzymujemy trójkąt $A_1B_1C_1$ podobny do trójkąta ABC w skali $s = 4$ (rys. II.7). Stąd pole trójkąta $A_1B_1C_1$ jest równe $16S$. Sześciokąt F_1 o wierzchołkach A', A'', B'', B', C', C'' jest różnicą trójkąta $A_1B_1C_1$ i sumy trzech trójkątów: $A_1C'B'$, $C''B_1A'$ i $B''A''C_1$, z których każdy przystaje do trójkąta ABC. Zatem pole sześciokąta F_1 jest równe $16S - 3S = 13S$.

b) Oznaczając przez $A_nB_nC_n$ trójkąt otrzymany z trójkąta ABC podobnie jak w przypadku a) w wyniku odpowiednich jednokładności o skali $s = -n$ ($n \geqslant 2$ i $n \in \mathbb{N}$) i stosując indukcję można łatwo wykazać, że trójkąt $A_nB_nC_n$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $s = 3n + 1$. Sześciokąt $A'_nA''_nB''_nB'_nC'_nC''_n$ jest różnicą trójkąta $A_nB_nC_n$ i sumy trzech trójkątów z których każdy jest podobny do trójkąta ABC w skali $s = n$. Stąd pole tego sześciokąta wynosi $(3n + 1)^2 \cdot S - 3n^2S = (6n^2 + 6n + 1)S$.



Rysunek II.7

Analiza błędów występujcych w rozwiązaniach zadania 6

62 kandydatów spośród 187, którzy egzamin wstępny zdali, nie rozwiązywało zadania 6. Wśród 125 kandydatów rozwiązujących to zadanie 47 ograniczyło się jedynie do wykonania rysunku w podpunkcie a). Z pozostałych 78 kandydatów rozwiązujących zadanie tylko 23 podało wystarczająco poprawne uzasadnienie wyniku w tym podpunkcie. Pozostali, nawet gdy podawali poprawny wynik, to bez uzasadnienia. Niektórzy pisali: *(...) to widać z rysunku.* Kilku kandydatów rozwiązywało zadanie w układzie współrzędnych. Przyjmowano przy tym dowolne współrzędne dla punktów A, B, C nie uwzględniając warunku ich niewspółliniowości, wyznaczano obrazy tych punktów w odpowiednich symetriach i co najwyżej próbowano wyznaczać pola otrzymanych trójkątów. Rachunki stawały się przy tym tak skomplikowane, że pól powstałych trapezów już nie liczono. Niektórzy stosowali błędne wzory na pole trapezu, na przykład $P = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot h$ albo $P = a \cdot h$, gdzie a, b – długości podstaw trapezu, h – długość jego wysokości.

Jeszcze więcej błędów popełniano w części b). Tą część rozwiązywało 70 kandydatów, ale tylko 4 z nich uzyskało poprawny wynik. Trudność sprawiało kandydatom nie tylko uogólnienie wyniku z podpunktu a) na przypadek dowolnego n naturalnego, ale również samo pojęcie jednokładności o skali ujemnej. Rozumowano na przykład następująco:

— *(...) pole nowego sześciokąta jest mniejsze, bo jego boki są krótsze o* $s = n$,

— *(...) im większe* n*, tym mniejsza skala, czyli też mniejsze będzie pole całej figury,*

— *(...) sześciokąt otrzymany przez jednokładności o skalach $s = -n$ będzie miał pole odpowiednio o 2, 3, 4, 5,... razy mniejsze,*
— *(...) wraz ze wzrostem n pole sześciokąta będzie malało.*

Błędy pojawiały się również przy wyznaczaniu długości odcinka i pól figur otrzymanych przez jednokładność, przykładowo pisano:

— *(...)* $|AB'| = -n|AB|$, gdzie B' to obraz B w jednokładności o środku A i skali $s = -n$,
— *(...) jeżeli boki trójkąta są dwa razy większe, to pole trójkąta o tych bokach jest też dwa razy większe,*
— *(...) jeżeli F' jest obrazem figury F w podobieństwie o skali n, to pole $F' = n\cdot$pole F, w jednokładności o skali $s = -n$ pole $F' = -n\cdot$ pole F.* Stąd w szczególności pisano, że pole sześciokąta w przypadku b) jest równe $-n \cdot 13S$, gdzie S jest polem wyjściowego trójkąta ABC.

Podawano również inne wzory na pole otrzymanego sześciokąta na przykład:

$$P = \frac{1}{n}13S, \qquad P = \frac{13}{-n}S, \qquad P = 13nS.$$

Dla trójkąta $AA'A''$, gdzie $A' = J_B^{-n}(A)$, $A'' = J_C^{-n}(A)$, gdzie a, h – długości odpowiednio boku i wysokości trójkąta ABC, podano przykładowo taki wzór:

$$P_{\Delta AA'A''} = -\frac{1}{2}[a + (-n) \cdot a] \cdot [h + (-n) \cdot h].$$

W kilku rozwiązaniach pola powstałych trójkątów w przypadku b) wyznaczono poprawnie, ale pola powstałych trapezów błędnie.

Źle rozumiana jest definicja jednokładności, zwłaszcza jednokładności o skali ujemnej. Stosowano na przykład taką implikację

$$J_A^{-n}(C) = C' \Rightarrow \frac{|CC'|}{|AC|} = -n.$$

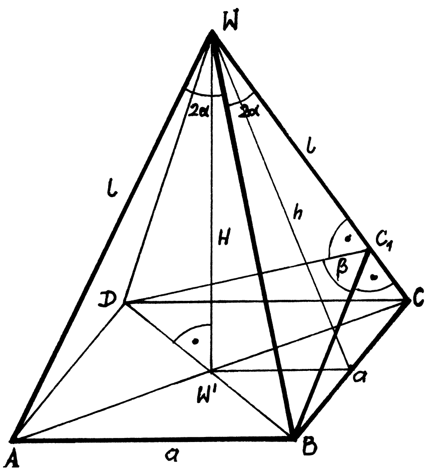
Również podobieństwo figur jest pojęciem niezbyt dobrze rozumianym przez kandydatów. Jeden z kandydatów po wyznaczeniu punktów $C_1' = J_A^{-1}(C)$, $C_2' = J_A^{-2}(C)$, $C_1'' = J_B^{-1}(C)$, $C_2'' = J_B^{-2}(C)$ pisał, że trapezy: $C_1'C_1''BA$ i $C_2'C_2''BA$ są podobne.

W kilku przypadkach próbowano doszukać się pewnej regularności w wyznaczaniu pola sześciokąta, w zależności od przyjętej skali jednokładności. Na przykład kandydat rozumował tak: *(...)skoro dla $n = 1$ $P(F) = 3S \cdot 4 + S = 13S$, dla $n = 2$ $P(F) = 3S \cdot 9 + S = 28S$, to dla dowolnego n $P(F) = 3S(n+1)^2 + S$* (F oznacza tu otrzymany sześciokąt). Niestety, dla $n \geqslant 2$ podane wzory są błędne.

Jeden z kandydatów próbował doszukać się w polach otrzymanych sześciokątów ciągu geometrycznego albo arytmetycznego, lecz nie uzyskał poprawnego wyniku.

Szkic rozwiązania zadania 7

Z danych zadania wynika, że wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są przystającymi trójkątami równoramiennymi, zatem $|AB| = |BC| = |CD| = |AD|$, co oznacza, że czworokąt $ABCD$ jest rombem (rys. II.8). Oznaczając przez W' rzut prostokątny wierzchołka W na płaszczyznę $ABCD$ otrzymuje się cztery przystające trójkąty prostokątne: $AW'W$, $BW'W$, $CW'W$ i $DW'W$. Z przystawania tych trójkątów wynika, że $|W'A| = |W'B| = |W'C| = |W'D|$, czyli $ABCD$ jest kwadratem, sam zaś ostrosłup – ostrosłupem prawidłowym.



Rysunek II.8

a) Oznaczając przez a długość krawędzi podstawy, przez h – długość wysokości ściany bocznej, a przez H – długość wysokości ostrosłupa, z definicji funkcji sinus, cosinus i twierdzenia Pitagorasa można łatwo wyznaczyć a, h i H. Otrzymuje się: $a = 2l\sin\alpha$, $h = l\cos\alpha$, $H = l\sqrt{\cos 2\alpha}$. Wyznaczone wielkości są liczbami dodatnimi, gdyż w każdym narożu wielościanu wypukłego suma miar wszystkich jego kątów płaskich jest liczbą należącą do przedziału $(0; 2\pi)$. Czyli w przypadku tego zadania α musi spełniać warunek: $0 < 4 \cdot 2\alpha < 2\pi$, stąd $\alpha \in (0; \frac{\pi}{4})$. Dla kątów z takiego przedziału wyznaczone liczby a, h i H są liczbami dodatnimi. Ostatecznie $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H = \frac{4}{3}l^3 \sin^2\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$.

b) Niech C_1 będzie rzutem prostokątnym punktu B na prostą CW. Ponieważ każda ściana ostrosłupa $ABCDW$ jest trójkątem ostrokątnym, więc punkt C_1 należy do krawędzi CW tego ostrosłupa i kąt BC_1D jest kątem liniowym kąta dwuściennego, zawartego między ścianami BCW i DCW tego ostrosłupa. W ostrosłupie prawidłowym wszystkie kąty zawarte między jego ścianami bocznymi są kątami przystającymi. Wystarczy zatem oszacować miarę jednego z nich. Oznaczając przez ϕ miarę np. kąta BC_1D, przez h_1 – długość odcinka BC_1 i stosując do trójkąta DBC_1 twierdzenie cosinusów można wyliczyć $\cos\phi$, a następnie oszacować kąt ϕ. W wyniku elementarnych przekształceń otrzymuje się

$$\cos\phi = \frac{(h_1 - a)(h_1 + a)}{h_1^2}.$$

Ponieważ h_1 jest długością przyprostokątnej w trójkącie prostokątnym, którego przeciwprostokątna ma długość a, więc $h_1 < a$, a tym samym $\cos\phi < 0$. Stąd $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$, czyli ϕ jest kątem rozwartym (uwaga: górne ograniczenie ϕ wynika z tego, że ostrosłup prawidłowy jest wielościanem wypukłym).

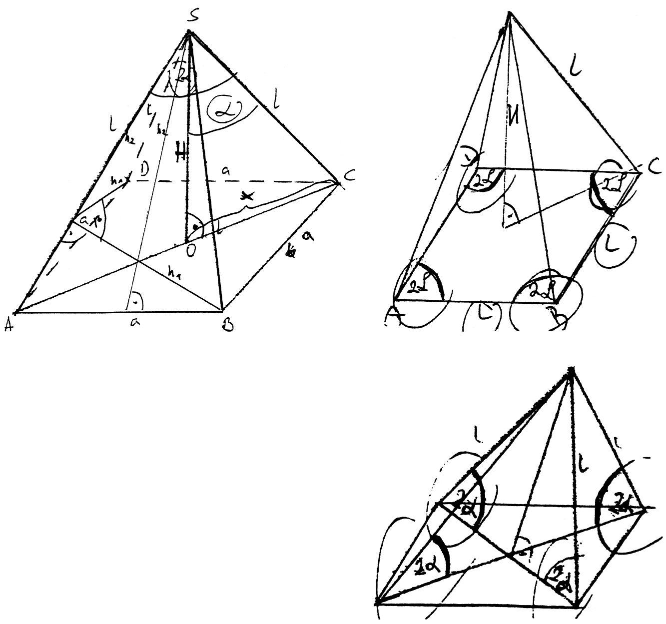
Analiza błędów w rozwiązaniach zadania 7

W badanej grupie zadanie 7 rozwiązywało 176 kandydatów, nie rozwiązywało 11. Całkowicie źle to zadanie rozwiązało 11 kandydatów. Tylko 2 kandydatów otrzymało maksymalną liczbę 10 punktów. W grupie 46 tych kandydatów, którzy za cały egzamin wstępny uzyskali powyżej 50 punktów, aż 25 otrzymało z zadania 7 najwyżej 5 punktów, w tym 1 z nich 0 punktów. Większość kandydatów rozwiązujących to zadanie wykonała rysunek poprawnie. W niektórych jednak przypadkach źle zaznaczono dane. Przykłady błędnie zaznaczonego kąta α przedstawia rysunek II.9.

Przykłady błędnego zaznaczenia kąta β zawartego między ścianami bocznymi ostrosłupa ilustruje rysunek II.10.

Większość kandydatów nie uzasadniała, że dany ostrosłup jest prawidłowym ostrosłupem czworokątnym. Próby uzasadnienia można znaleźć jedynie u 49 kandydatów, lecz tylko u dwóch z nich są one wystarczające. 14 kandydatów stwierdzało: *(...)z danych zadania wynika, że ostrosłup jest prawidłowym, czworokątnym.* Nie czuli oni potrzeby, aby to uzasadnić. To, że w podstawie ostrosłupa jest kwadrat, 35 kandydatów uzasadniało równością krawędzi bocznych albo przystawaniem kątów płaskich przy wierzchołku ostrosłupa, albo przystawaniem ścian bocznych ostrosłupa, albo pisało: *(...)to wynika z danych zadania.* Pozostałych 116 kandydatów uważało za oczywiste, że w podstawie jest kwadrat i nie widziało potrzeby, aby to napisać oraz uzasadnić.

W żadnym rozwiązywanym zadaniu nie uwzględniono założenia, że $\alpha \in (0; \frac{\pi}{4})$. Jeden z kandydatów napisał, że $2\alpha \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 0) \ \wedge \ 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k$. Świadczy to o tym, że nie zna własności kątów płaskich dowolnego naroża wielościanu, a nawet nie rozumie pojęcia miary kątów. Inny z kandydatów wyznaczał rzut prostokątny ostrosłupa na płaszczyznę jego podstawy i z tego rzutu wnioskował, że $\alpha = 45°$. Pozostali kandydaci nie zwracali uwagi na to, że kąt α nie może być dowolny.



Rysunek II.9

W kilku przypadkach stosowano błędny wzór na objętość ostrosłupa. Na przykład: $V = P_p \cdot H$, gdzie P_p – pole podstawy, H – długość wysokości ostrosłupa. Popełniano też wiele błędów elementarnych, na przykład: stosowano błędne definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, popełniano błędy typu: $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, $\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$, w niektórych pracach błędnie stosowano twierdzenie Pitagorasa. Popełniano również błędy typu: $(\sin 2\alpha)^2 = \sin 4\alpha$. Często nie odróżniano wartości funkcji trygonometrycznych od argumentów tych funkcji. Świadczą o tym takie równoważności:

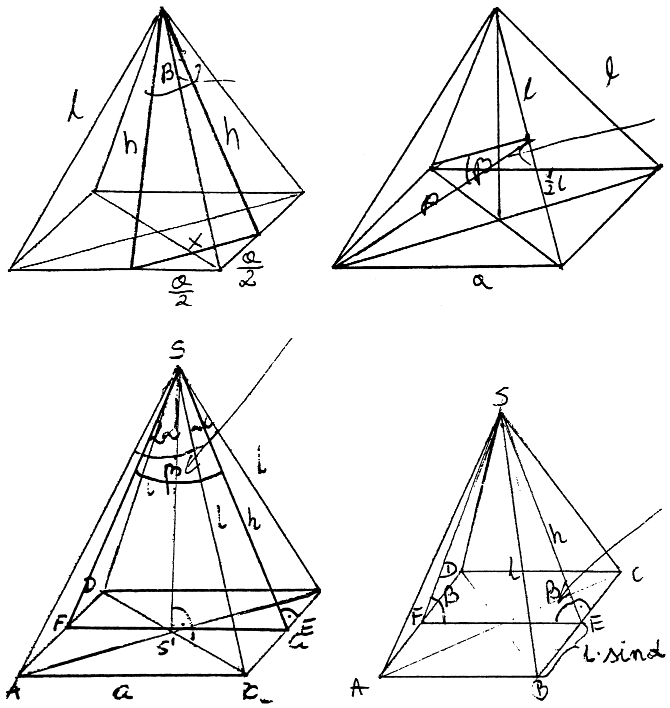
$$\cos\beta < 0 \Leftrightarrow \cos\beta \geqslant 120^\circ, \qquad 90^\circ > \sin x > 0^\circ \Leftrightarrow 90^\circ > \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\cos 2\alpha}} > 0^\circ.$$

Stosowano błędne implikacje, na przykład

$$\cos\phi = \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} - \cos 2\alpha} \Rightarrow \cos\phi \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 2\alpha\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \cos 2\alpha\right).$$

W niektórych rozwiązaniach stosowano błędne wzory na pole trójkąta takie, jak $P_\Delta = \frac{1}{2} l^2 \cos 2\alpha$, $P_\Delta = 2l \sin\alpha$, gdzie l – długość ramienia trójkąta równoramiennego, 2α – miara kąta między ramionami tego trójkąta.

W podpunkcie b) jeżeli nawet wyznaczono $\cos\beta$ poprawnie (β – miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi), to często brakowało wniosku, że kąt o mierze β jest kątem rozwartym. W przypadku, gdy był taki wniosek, to nie podawano dla niego wystarczającego uzasadnienia. Wiele jednak odpowiedzi było błędnych.



Rysunek II.10

Rozwartość kąta β uzasadniano następująco:

— Jeden z kandydatów najpierw sprawdzał za pomocą twierdzenia Pitagorasa, że kąt nachylenia ścian bocznych nie jest kątem prostym. Z tego wnioskował, że musi być kątem rozwartym.

— Po licznych błędach rachunkowych kandydat otrzymał następujący wzór na $\cos\beta$: $\cos\beta = -\frac{a^2-4l\cos\alpha}{4l\cos\alpha}$. Zakładał, że $0° < \alpha < 90°$ i pisał $\cos\beta < 0 \Leftrightarrow \cos\beta \geqslant 120°$, po czym dał odpowiedź: *(...) kąt β zawarty pomiędzy sąsiednimi ścianami jest kątem rozwartym.*

Znaczna liczba kandydatów uważała, że kąt β jest kątem ostrym. Uzasadniała to w najrozmaitszy sposób. Na przykład:

— *Kąty między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa zawsze są kątami ostrymi, ponieważ gdyby były proste, to nie istniałby ostrosłup, którego boki są trójkątami równoramiennymi. Gdyby był rozwarty, także.*

— *Jeśli jest to ostrosłup prawidłowy, tak mi się wydaje, to kąty między sąsiednimi ścianami bocznymi powinny być ostre.*
— *Kąt pomiędzy sąsiednimi ścianami jest ostry, ponieważ jest ostrosłup (kąt prosty – graniastosłup).*
— *Aby istniał taki ostrosłup czworokątny o podstawie będącej trójkątem równobocznym i ścianach będących trójkątami równoramiennymi, kąty pomiędzy ścianami bocznymi muszą być ostre ($x \in (0; \pi)$).*
— *Kąty pomiędzy sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa są ostre. Nie mogłyby być proste, bo wtedy ostrosłup stałby się prostopadłościanem. A gdyby kąty były rozwarte, to bryła stałaby się bryłą o podobnych podstawach, ale różniących się powierzchnią.*

Byli również kandydaci, którzy uważali, że kąt między ścianami bocznymi jest prosty. Swojej odpowiedzi albo nie uzasadniali, albo ich uzasadnienia były przykładowo takie:

— *Nieważne jak przecinalibyśmy poziomo ten ostrosłup, to i tak powierzchnią przekroju jest kwadrat. Tak więc kąty pomiędzy sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa są proste.*
— *Jeżeli jest to ostrosłup, w którym każda krawędź boczna ma długość l, więc w podstawie jest kwadrat, więc ściany boczne mają kąty proste.*

Część kandydatów sądziła, że na ostrość lub rozwartość kąta między ścianami bocznymi ma wpływ miara kąta α i nawet gdy kandydat uzyskiwał poprawny wzór na zależność między α i β: $\cos\beta = -\operatorname{tg}^2\alpha$, to wnioskował następująco:

— *(...) dla każdego* $\alpha \in \mathrm{R}$ $\operatorname{tg}^2\alpha \geqslant 0$, *stąd* $\cos\beta \leqslant 0$, *więc kąt* β *jest prosty lub rozwarty,*
— *(...)jeżeli* $0^\circ < \cos\beta < 90^\circ$, *to kąt* β *jest ostry, jeżeli* $90^\circ < \cos\beta < 180^\circ$, *to kąt* β *jest rozwarty.*

W ostatnim przykładzie widać, że kandydat nie tylko nie brał pod uwagę założenia o kącie α, ale również mylił argumenty z wartościami funkcji cosinus.

Bardzo dużo błędów występuje w przekształceniach algebraicznych (nawet w elementarnych działaniach na ułamkach), w rozwiązaniach równań i nierówności trygonometrycznych.

W wielu przypadkach w wyniku błędnych rozumowań lub błędów rachunkowych otrzymywano sprzeczności albo dochodzono do absurdalnych wyników, nie wyciągając z tego żadnych wniosków. Oto przykłady:

— W wyniku błędnych przekształceń kandydat doszedł do wniosku, że długość wysokości ostrosłupa jest równa długości krawędzi bocznej i nie zwracając uwagi na to, że jest to niemożliwe, otrzymane wartości wykorzystywał do obliczenia objętości ostrosłupa.
— Inny z kandydatów otrzymał wniosek, że wysokość ściany bocznej jest równa wysokości ostrosłupa.

— Wnioskując z danych zadania kandydat twierdził, że w podstawie ostrosłupa jest romb o długości boku równej l. Oznaczając przez x długość połowy przekątnej rombu pisał, że $x = \frac{1}{2}l$, po czym twierdząc, że α jest również miarą kąta między przekątną podstawy a bokiem rombu wyznaczył $\cos\alpha = \frac{x}{l}$, skąd otrzymał $\alpha = 30^\circ$. Dalej otrzymany wynik podstawił znowu do równania $\cos\alpha = \frac{x}{l}$ i tym razem poprawnie wyznaczając $\cos 30^\circ$ otrzymał $x = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Nie zauważył przy tym, że dostał różne wyniki na x. W tym rozwiązaniu kandydat popełnił cały szereg błędów: po pierwsze krawędź podstawy ostrosłupa nie musi mieć długości l, przekątna rombu (zresztą nie wiadomo która) nie może mieć długości równej l, kąt nachylenia przekątnej (też nie wiadomo której) do boku rombu nie może mieć miary α (w tym zadaniu romb jest kwadratem), w dodatku z powodu błędnego rozwiązania równania $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ kandydat na x otrzymał dwa różne wyniki.

— W wyniku błędów w przekształceniach kandydat otrzymał na $\cos\beta$ błędny wzór: $\cos\beta = \frac{4\cos^3\alpha - \cos\alpha - 4l^2\cos^2\alpha - l^2}{4\cos^3\alpha - \cos\alpha}$ i chciał przedyskutować, czy $\cos\beta > 0$. W tym celu napisał alternatywę równań: $4\cos^3\alpha - \cos\alpha - 4l^2\cos^2\alpha - l^2 = 0 \ \vee\ 4\cos^3\alpha - \cos\alpha = 0$. Rozwiązując drugie z tych równań otrzymał:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \vee\ \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee\ \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee\ \alpha = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$
$$\vee\ \alpha = -\frac{4}{3}\pi + 2k\pi.$$

Nie skomentował otrzymanych wyników, a tymczasem żaden z nich nie może być miarą kąta określonego w zadaniu. Do pierwszego równania kandydat zastosował jedynie podstawienie $t = \cos\alpha$, ale samego równania nie rozwiązał. Nie badał również czy $\cos\beta > 0$.

— Oznaczając przez ϕ miarę kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa kandydat wyznaczył $\cos\phi$, pisząc: $\cos\phi = \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} - \cos 2\alpha}$ i stwierdził, że z tego równania wynika następujące: $\cos\phi = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 2\alpha\right)\cdot\left(\frac{1}{2} - \cos 2\alpha\right)$, po czym podstawiając $a = \cos 2\alpha$ rozwiązał równanie $\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}a\right)\cdot\left(\frac{1}{2} - a\right) = 0$ otrzymując $a = 1$ lub $a = 2$. Uznał, że to niemożliwe i dlatego doszedł do wniosku, że kąt między ścianami bocznymi jest ostry. Tylko jeden z kandydatów zwrócił uwagę na to, że kąty pomiędzy dowolnymi sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa przystają do siebie. Pozostali brali pod uwagę tylko jedną parę ścian bocznych.

Wnioski z przeprowadzonej analizy

Porównując wyniki grupy tych kandydatów, którzy w roku 2003 egzaminu nie zdali, i grupy kandydatów, którzy egzamin wstępny zdali w 2004 roku, można zauważyć, poza różnicą w liczbach otrzymanych punktów, również pewne różnice w sposobach rozwiązywania zadań. Znaczna liczba kandydatów, którzy egzamin wstępny zdali, przynajmniej próbowała podać uzasadnienia przedstawianych rozumowań, choć w większości były one nieudolne i często błędne. Więcej również kandydatów zaczynało rozwiązywać zadania geometryczne (czasem był to tylko rysunek). Jednak błędy popełniane przez kandydatów obydwu grup są podobne.

1. W obydwu badanych grupach znacznie łatwiejszymi dla kandydatów były zadania z geometrii analitycznej. Widać to wyraźnie na przykładzie zadań, które można było prosto rozwiązać metodami klasycznej geometrii; kandydaci próbowali je rozwiązywać analitycznie dochodząc przy tym do skomplikowanych rachunków. Jednak w rozwiązaniach zadań z geometrii analitycznej również występowały błędy świadczące na przykład o tym, że jedynym znanym przez kandydatów równaniem prostej jest równanie kierunkowe. Popełniano również wiele błędów z rachunku wektorowego, przykładowo źle dodawano wektory, utożsamiano pojęcie wektora z długością wektora, źle interpretowano liniową zależność wektorów.
2. Do rozwiązań zadań geometrycznych zwykle dołączano rysunek (w niektórych przypadkach rozwiązanie ograniczało się tylko do rysunku). Niejednokrotnie poprawny rysunek sugerował sposób rozwiązania i odpowiedź formułowano tylko na podstawie rysunku (np. w zadaniu 6a). W rozwiązaniu niektórych zadań rysunki były błędne i nawet gdy kandydat w przedstawianym rozumowaniu powoływał się na pewne twierdzenia, to nie dostrzegał tego, że wyciągane wnioski są sprzeczne z sytuacją zaznaczoną na rysunku (np. w rozwiązaniach zadania 4). Powód tkwił również w tym, że nie wszyscy kandydaci znali twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt, opisanym na czworokącie i twierdzenia o kątach wpisanych i środkowych okręgu.
3. Większość kandydatów nie rozumiała polecenia zadania 4a: *(...) uzasadnić, że przekątna trapezu ma długość* $r\sqrt{2}$. Uważano, że skoro wiadomo, jaka ma być ta długość, to nie ma potrzeby tego uzasadniać. Przyjmowano ją za daną i wykorzystywano w dalszej części rozwiązania zadania.
4. Najtrudniejszym dla kandydatów było zadanie 6b, w którym należało zauważyć pewną zależność rekurencyjną i dojść do pewnych uogólnień. Błędy wynikały nie tylko z trudności w przeprowadzeniu analizy problemowej i przeniesieniu rozumowania z konkretnej sytuacji dla $n = 1$ (4a) na przypadek, gdy n jest dowolną liczbą naturalną, ale również z nierozumienia jednokładności o skali ujemnej, nierozumienia pojęcia miary, w szczególności z nieznajomości twierdzenia o stosunku pól figur jednokładnych i ogólnie – podobnych.
5. Dużą trudność sprawiało również kandydatom rozwiązanie zadania ze stereometrii. Błędy spowodowane były nie tylko źle zaznaczanym na rysunku

kątem między płaszczyznami, ale również niedostrzeganiem i nieuwzględnianiem założeń, jakie choć nie wymienione, wynikają z treści zadania, oraz nieumiejętnością sprawdzenia, czy wyznaczony kąt jest ostry, prosty czy rozwarty. Wyniki spowodowane były również bardzo często błędami popełnianymi w rozwiązaniach równań i nierówności trygonometrycznych, w elementarnych przekształceniach algebraicznych, a także w stosowaniu niewłaściwych wzorów na objętość ostrosłupa i pola figur płaskich.

Generalnie w większości rozwiązań zauważa się:

1. Brak refleksji kandydatów nad wyborem sposobu rozwiązania zadań. Najczęściej wybierana była długa droga, ale taka, w której można było zastosować znane schematy rozwiązań.
2. Trudność w formułowaniu przez kandydatów wniosków, ich analizowaniu, uzasadnianiu i weryfikowaniu.
3. Brak analizy i interpretacji otrzymanych wyników.

Ogólna analiza dydaktyczna błędów popełnianych przez kandydatów na studia matematyczne w Akademii Pedagogicznej

Przeprowadzona analiza ujawnia, jak niewystarczające jest przygotowanie z geometrii kandydatów na nauczycielskie studia matematyczne, jaką trudność sprawia absolwentom szkół średnich rozumowanie geometryczne, formułowanie hipotez, uzasadnianie wniosków, prawidłowe korzystanie z definicji i twierdzeń, rozwiązywanie zadań ze stereometrii, spowodowane zarówno słabo rozwiniętą wyobraźnią przestrzenną, jak również trudnościami związanymi z logicznym rozumowaniem.

Zauważa się, że trudności przy rozwiązywaniu zadań geometrycznych są znacznie większe niż przy rozwiązywaniu zadań z innych działów matematyki. Brak ściśle sformułowanych reguł postępowania i praktycznych szczegółowych wskazówek pomocnych przy rozwiązywaniu zadań geometrycznych sprawia, że każde tego typu zadanie wymaga indywidualnego i specyficznego rozumowania. Najmniej trudności sprawiają kandydatom zadania z geometrii analitycznej, gdyż przeważa w nich rachunek algebraiczny. Natomiast zadania, których tematem jest wykrycie twierdzenia, stawianie hipotez, ich weryfikowanie i dowodzenie, uzasadnianie rozumowania, sprawiają kandydatom ogromne trudności (przykładem są zadania 6 i 7.b części II). Kandydat rozwiązujący zadania tego typu, nie ma gotowych schematów, próbuje różnych dróg, często błądzi, musi zmobilizować nie tylko uwagę i pamięć, lecz także wyobraźnię. Każde zadanie geometryczne wymaga nowych pomysłów twórczych.

Dużą rolę w rozwiązaniach tego typu zadań odgrywa rysunek. Gdy jest on poprawnie wykonany, może zasugerować pomysł rozwiązania i pomóc przy poszukiwaniu ścisłego, formalnego dowodu geometrycznego. Konieczna jest jednak weryfikacja otrzymanych wyników na drodze dedukcji. Sugestia rysunku jest bardzo duża (pokazuje to rozwiązanie zadania 4 części II). Kandydat wyczytuje z niego to, co powinien udowodnić i dowód takiego twierdzenia wydaje mu się zbędny. W rezultacie zakłada, że twierdzenie jest prawdziwe i powołuje się na nie w dalszych rozumowaniach. Często kandydat sugerując się jednym przedstawionym na rysunku przypadkiem nie dostrzega innych (np. w zadaniu 9 części I) albo wskutek przyjęcia błędnych przesłanek na rysunku, dochodzi do błędnych wniosków. Brak przy tym krytycznej kontroli rozumowania dedukcyjnego, że to co sugeruje rysunek doprowadza do fałszywych wniosków.

Przedstawiona w tym artykule analiza rozwiązań zadań geometrycznych kandydatów na studia uświadamia, jak wiele należałoby zmienić w nauczaniu geometrii elementarnej. Dla poprawienia stanu wiedzy geometrycznej absolwentów szkół średnich, nieodzownym staje się większe zwracanie uwagi na następujące aspekty kształcenia geometrycznego.

1. Dyskutowanie z uczniami rozmaitych rozwiązań tego samego zadania.

> Stałe uświadamianie uczniom różnych sposobów postępowania prowadzących do tego samego celu, przyzwyczajanie do racjonalnego wyboru najbardziej odpowiedniej i najbardziej ekonomicznej drogi wiodącej do rozwiązania zagadnienia.
>
> (Krygowska, 1977, s. 112)

2. Formułowanie zadań, których rozwiązanie wymaga wykrycia, wypowiedzenia i udowodnienia nowego twierdzenia[1]. Dostrzegając pewną prawidłowość w konkretnej sytuacji, uczeń formułuje hipotezę matematyczną a następnie uzasadnia jej poprawność i dokonuje uogólnień.
3. Stawianie problemów otwartych.
4. Wykorzystywanie algorytmów jedynie w połączeniu z równoczesnym wprowadzaniem w myślenie pojęciowe (np. w zadaniach z geometrii analitycznej).
5. Umiejętne korzystanie z rysunków. Zwracanie uwagi na to, aby sugestie przedstawione na rysunku były poparte rozumowaniem dedukcyjnym, natomiast do danych zmysłowych odnosić się krytycznie.
6. Prawidłowe korzystanie z definicji i twierdzeń, po uprzednim skontrolowaniu, czy w konkretnej sytuacji spełnione są wszystkie założenia.
7. Zwracanie uwagi na redagowanie, zapisywanie, jasne przekazywanie swoich myśli i poprawne ilustrowanie przeprowadzanego rozumowania.

Uwzględnianie w kształceniu wyżej wymienionych aspektów nauczania jest nieodzowne do poprawy stanu wiedzy geometrycznej uczniów.

[1] Wiele przykładów tego typu zadań czytelnik znajdzie w artykule wymienionym w spisie literatury (Górowski, Klakla, Łomnicki, 2004).

Literatura

Górowski, J., Klakla, M., Łomnicki, A.: 2004, Zadania „na wymuszanie" jako środek matematycznej aktywizacji uczących się, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 61-80.

Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1*, WSiP, Warszawa.

Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków