Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis
Folia 36 Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia I (2006)

Maciej Klakla

Gotowa wiedza i aktywność w matematycznym kształceniu na przykładzie kątów Langleya

Abstract. The article contains a didactic project of classes with mathematics students – future teachers. On the example of problems related to Langley's angles, the author presents differences between two styles of teaching mathematics. One style is based on existing mathematical knowledge, and the second requires active participation of the students in creating this knowledge during the problem solving process.

Wstęp

Niniejszy artykuł ma na celu pokazanie, na wybranym przykładzie dotyczącym tzw. kątów Langleya, różnicy między „gotową matematyką" a matematyką jako aktywnością, w sytuacji, która pozwala na matematyczną aktywizację studentów. Ten sposobób organizowania zajęć studenci będą mogli wykorzystać w swojej przyszłej pracy z młodzieżą w szkole, w myśl słusznego postulatu (Nowecki, 2004), aby zajęcia prowadzone z matematyki w szkole wyższej kształcącej nauczycieli stanowiły dla studentów wzorzec do naśladowania, także w sensie dydaktycznym, jako przykład aktywizacji uczących się. Przedstawiony projekt zajęć ze studentami został opracowany w postaci tzw. „sytuacji badawczej". Jest to specyficzna forma przedstawienia projektu dydaktycznego zadania wieloetapowego (Klakla, 1991; 2002) w postaci ciągu sytuacji dydaktycznych. Przeprowadzamy studentów przez te sytuacje, dość wyraźnie kierując zarówno kolejnością pracy nad poszczególnymi problemami, jak i wyborem sposobów ich rozwiązania. Głównym celem, który chcemy tu osiągnąć, jest poszerzenie ich doświadczeń w pracy nad poszczególnymi problemami, zaś w mniejszym stopniu rozwijanie umiejętności stawiania i formułowania w rozważanych sytuacjach nowych pytań czy problemów. Dla kontrastu, w drugiej części artykułu omawiam znajdujące się w literaturze przykłady zadań, związanych z tematyką kątów Langleya zadań, dla których przedstawione rozwiązania ograniczają się do prezentacji „gotowej matematyki".

1. Aktywność matematyczna i gotowa wiedza w matematycznym kształceniu przyszłych nauczycieli

Matematyka jako nauka może być postrzegana jako gotowa wiedza, opracowana przez matematyków, którą prezentuje się jako zestaw teorii zawierających podane w odpowiedniej logicznej kolejności definicje pojęć, twierdzenia i ich dowody, przykłady, algorytmy itp. (Klakla, 2002). Taki obraz matematyki można wynieść po zapoznaniu się z niejedną matematyczną pracą naukową, w której wszystkie informacje mają swoje logicznie uzasadnione miejsce, tworząc „gotowy gmach wiedzy matematycznej". Czytając takie prace, jesteśmy zafascynowani pięknem, zwięzłością, logiczną konstrukcją tej nauki. Bardzo często, także na studiach nauczycielskich, taki właśnie obraz matematyki utrwalany jest w prowadzonych wykładach z różnych przedmiotów matematycznych, Oczywiście w wielu dziedzinach życia taka „gotowa" matematyka, jako swoiste kompendium wiadomości z poszczególnych działów matematyki, jest niezbędna i użyteczna. W wielu zawodach, na wielu stanowiskach pracy umiejętność korzystania z tego uporządkowanego zestawu wyników działalności matematyków, wyników danych w postaci twierdzeń, algorytmów czy metod prowadzących do rozwiązywania standardowych dla danego działu matematyki zagadnień, jest istotna i ważna, głównie ze względu na owe standardowe zastosowania. Jednakże to nie umiejętność rozwiązywania tych standardowych zadań jest głównym powodem, dla którego matematyka jako przedmiot nauczania pojawia się w szkołach różnych typów, na różnych poziomach nauczania.

Matematyka jest także dziedziną specyficznej, intelektualnej działalności człowieka, działalności, której produktem jest wspomniana wyżej „gotowa matematyka", a środkiem specyficzne matematyczne myślenie (Klakla, 2002). Tę działalność w języku dydaktyki matematyki nazywamy aktywnością matematyczną, która w przypadku zawodowych matematyków ma charakter działalności twórczej. Niektórzy matematycy sądzą nawet, że umiejętność matematycznego działania jest ważniejsza od tego, co się wie (*Les mathématiques sont moins savoir que savoir faire – matematyka to w mniejszym stopniu wiedzieć, co umieć działać*, Servais, 1956, s. 40), chociaż oczywiście nie można działać w matematycznej „próżni".

Niestety „gotowa matematyka" zupełnie nie oddaje tego, co kryje się pod matematyczną aktywnością, która do niej doprowadziła. Czytając prace matematyków, którzy przedstawiają uzyskane wyniki i ich dowody, nie dowiadujemy się zbyt wiele, jaką drogą autorzy doszli do tych rezultatów, jakie napotykali trudności, skąd brały się pomysły prowadzące do sukcesu w postaci rozwiązania problemu. Pracujący twórczo matematycy na ogół niechętnie piszą o swojej złożonej, twórczej działalności, której wewnętrzna struktura, stosowane procedury, mechanizmy i warunki funkcjonowania nie są jeszcze dostatecznie znane (Krygowska, 1986). Trzeba jednak przyznać bezstronnie, że nie jest łatwo pisać o twórczej matematycznej działalności tak, aby było to zrozumiałe dla niespecjalistów, a dla matematyków liczy się uzyskany rezultat, którego poprawność inni matematycy potrafią już zweryfikować. Stąd, na ogół, prace naukowe matematyków, adresowane przecież do innych matematyków, absolutnie nie odzwierciedlają ani dróg poszukiwań rozwiązania problemu, ani bezskutecznych prób, błądzeń czy też błędów, które mogły pojawiać się w pracy nad rozwiązywaniem problemu. Redagując wyniki pracy badawczej, matematycy rzadko zdają sprawę z przebiegu pracy myślowej nad rozwiązywaniem problemu, ograniczając się jedynie do prezentacji uzyskanych rezultatów oraz ich uzasadnienia. W efekcie gotowe wytwory pracy matematyka pokazują dość jednostronny obraz tej nauki. Jest on ważny, ale nie pełny i nie wystarcza dla jej rozumienia. Świadomość tego jest szczególnie istotna w matematycznym kształceniu przyszłych nauczycieli matematyki, którzy przez swoje nauczanie przekażą uczniom taki obraz matematyki, jaki będzie powstawał w ich świadomości w efekcie studiowania tej dyscypliny. Takie nauczanie matematyki na studiach nauczycielskich, które ogranicza się do pokazywania tylko „gotowej matematyki", deformuje jej obraz w umysłach przyszłych nauczycieli, powodując, że przyjmują oni styl prezentowania „gotowej wiedzy matematycznej" za standard, rozumując, że to musi być dobry wzorzec postępowania dydaktycznego, skoro ich tak właśnie uczono.

Efektem takiego stylu nauczania w szkole wyższej jest przedstawianie w szkole przez nauczycieli często tylko „gotowej matematyki" i podawanie jej do nauczenia się. Również praca nad zrozumieniem „gotowej matematyki", bardzo ważna i kształcąca, związana z rozwijaniem umiejętności czytania tekstów matematycznych ze zrozumieniem (Konior, 2002), bardzo często jest zupełnie pomijana w szkole. Powoduje to, że młodzież nie rozumiejąc tego przedmiotu, nierzadko zmuszana do pamięciowego opanowywania treści bez ich zrozumienia, odwraca się od przedmiotu, a matematyka staje się postrachem uczniów, zatracając swoje intelektualne walory przedmiotu szkolnego.

Studia matematyczne dla nauczycieli powinny więc poza gotową wiedzą matematyczną dostarczać studentom także wielu okazji do podejmowania aktywności matematycznej, w jej różnorodnych aspektach i przejawach (Klakla, 1991, 2002; Krygowska, 1986; Moszner, 2004; Nowecki, 1984; Pardała, 1995), co jednak nie zawsze ma miejsce. Dominującą formą zajęć są wykłady, które w swojej większości ograniczają się do przekazywania właśnie gotowej wiedzy, i ćwiczenia, podczas których rozwiązywane są różnorodne zadania. O ile na wykładach trudno jest, z wielu powodów, w pełni aktywizować studentów, (co nie oznacza, że nie jest to możliwe), to ćwiczenia wydają się być predestynowane do takiej właśnie aktywizacji. Tu jednak sytuacja pozostawia wiele do życzenia. Rozwiązywanie standardowych zadań, ćwiczenie poznawanych na wykładach procedur, bez niezbędnej refleksji nad sposobami ich uzyskania, zajmują większość czasu. Analizujący tę sytuację Z. Moszner (2004) wyraźnie stwierdza:

> Czy my na studiach nauczycielskich uczymy aktywności matematycznej? Sądzę, że jeżeli tak, to w ograniczonym zakresie. Powodów jest wiele.

> Napięte plany i programy studiów, minima programowe, nastawione na „co?", a nie na „jak?", nie dają zbyt dużej ilości czasu, zwłaszcza na wykładach. Aktywność matematyczna wymaga czasu i dla uczącego jej i dla tego, który się uczy. Przypomnijmy sobie, ile czasu zajmuje nam wymyślenie czegoś nowego w matematyce. Nie bardzo też wiemy, jak uaktywniać studentów, bo to naprawdę niełatwe, wymaga czasu, indywidualizacji i nauczania przez przykład.
>
> (Moszner, 2004)

Poszukiwanie środków matematycznej aktywizacji studentów – przyszłych nauczycieli matematyki jest więc ważnym zadaniem stojącym przed dydaktyką matematyki.

Trzeba zwrócić uwagę jeszcze na jeden argument, przemawiający za tym, że nauczanie matematyki na wszystkich poziomach, a więc także w matematycznym kształceniu nauczycieli, powinno w dużym zakresie uwzględniać kształtowanie i rozwijanie aktywności matematycznej. Zauważmy, że większość uczniów, kończąc edukację powszechną, nie będzie w swej codziennej pracy wykorzystywała wiedzy matematycznej. Jeżeli więc uważamy, że wszyscy uczniowie powinni przejść na poszczególnych etapach kształcenia przez edukację matematyczną, to musimy dobrze uświadomić sobie, jakimi argumentami na rzecz tej edukacji dysponujemy. Nie wystarczy tu ograniczyć się do sloganów i haseł typu: *matematyka kształci logiczne myślenie*, bo tak naprawdę logika matematyczna i logika życia codziennego nie są tożsame, a w sytuacjach rzeczywistych kontekst, doświadczenie, zwyczaje i niepisane umowy odgrywają istotną rolę w rozumieniu otaczającego nas świata i w prawidłowym w nim funkcjonowaniu. Jeżeli więc postulujemy obowiązek matematycznego kształcenia dla wszystkich, to musimy zadbać o to, aby to kształcenie sprzyjało realizacji tych celów, które dotyczą kształtowania postaw i zachowań intelektualnych możliwych do wypracowywania w ramach matematycznego kształcenia, a transferowanych na inne niż matematyka dziedziny życia (Krygowska, 1986). To właśnie szeroko rozumiana aktywność matematyczna uczniów w sytuacjach matematycznych, gdzie reguły postępowania są, w porównaniu ze skomplikowanymi sytuacjami życiowymi, stosunkowo proste, może być skutecznym warsztatem wypracowywania takich postaw, niezbędnych do funkcjonowania w społeczeństwie w dorosłym życiu.

2. Organizowanie „sytuacji badawczej" na ćwiczeniach

Jako przykład rozważmy następujący, inspirowany problemem geometrycznym, ciąg sytuacji dydaktycznych, które mogą posłużyć do konstrukcji projektu sytuacji badawczej. Zwróćmy uwagę na to, że poszczególne problemy są tu formułowane przez nauczyciela, który wyraźnie wskazuje kolejne zadania do wykonania, przeprowadzając w ten sposób studentów przez poszczególne sytuacje dydaktyczne. Podane po każdej sytuacji komentarze dydaktyczne omawiają istotne aspekty danej sytuacji, związane z kształtowaniem postawy badawczej studentów, a co za tym idzie z kształtowaniem ich twórczej aktywności.

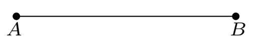
SYTUACJA 1
Wprowadzenie w wyjściowy problem.

Punktem wyjścia do działań studentów jest rysunek odręczny, który prowadzący zajęcia sporządza na tablicy, polecając studentom, aby rysowali równocześnie z nim, w swoich zeszytach. Wykonując rysunek, objaśnia głośno to, co robi, np. mówiąc: *Rysuję odcinek AB.* Teraz sprawdza, czy studenci zrobili to samo w swoich zeszytach. Następnie kontynuuje rysowanie na tablicy, mówiąc: *Z punktu A rysuję półprostą pod kątem* $50°$ *do tego odcinka.* Znów sprawdza, czy poprawnie narysowano w zeszytach ten element rysunku, po czym dorysowuje kolejny element, objaśniając: *Teraz z punktu B rysuję półprostą pod kątem* $60°$ *do odcinka AB. Ta ostatnia półprosta przecina pierwszą z narysowanych półprostych w punkcie C.* W ten sposób postępuje aż do zakończenia rysowania. Kolejne fazy pracy nauczyciela przedstawia seria rysunków od 1 do 6. W ten sposób po zakończeniu rysowania studenci dysponują już gotowym rysunkiem (rys. 6), na którym zaznaczone są zarówno dane kąty $50°$, $60°$, $20°$ i $80°$ jak i szukane x i y. Następnie nauczyciel formułuje polecenie – proszę znaleźć kąty x i y.

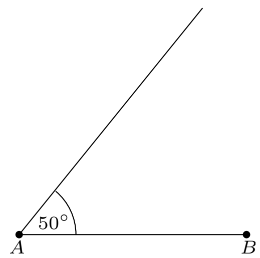
Komentarz. Taki sposób wprowadzenia wyjściowego problemu ma swoje zalety, na które zwrócimy uwagę. Gdyby zadanie zostało sformułowane werbalnie, już na początku studenci napotkaliby niełatwą do pokonania trudność, polegającą na zrozumieniu treści zadania i sporządzeniu poprawnego rysunku. Postawienie ich w sytuacji, w której zadanie zostało sformułowane dopiero po wykonaniu przez nich rysunku, według kolejnych wskazówek prowadzącego, ułatwia im zarówno zrozumienie postawionego zadania (polecenie: znajdź kąty x i y – jest już zilustrowane na rysunku), jak i uświadomienie sobie, które kąty są dane, a których szukamy (w wyniku wykonanej konstrukcji wydaje się to oczywiste). Rysunek 6, który został sporządzony przez studentów w zeszytach, jak i rysunek na tablicy, to rysunki odręczne i nie muszą być bardzo dokładne. Nauczyciel nie używa tu przyrządów (ani linijki, ani cyrkla, ani kątomierza), kąty są zaznaczane „na oko”.

SYTUACJA 2
Pierwsze próby poszukiwania rozwiązania.

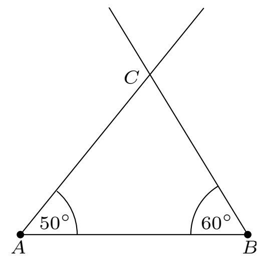
Prowadzący inicjuje dyskusję dotyczącą sposobów atakowania problemu. Mobilizuje studentów do przypomnienia tych wiadomości, które z uwagi na geometryczny charakter zadania i jego sformułowanie (konstrukcja) mogłyby być wykorzystane przy poszukiwaniu rozwiązania. Na początku chodzi o przypomnienie najprostszych wiadomości, takich jak twierdzenia o sumie kątów trójkąta, o sumie kątów czworokąta, twierdzenia o kątach wierzchołkowych i przyległych, o kątach przy dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą, itp. Jest to doskonała okazja do pewnej mobilizacji szkolnej wiedzy dotyczącej kątów. Kolejne przypominane przez nich wiadomości mogą dotyczyć np. twierdzeń o kątach w kole, twierdzenia o związku między kątem wpisanym a środkowym, opartych na tym samym łuku, twierdzenia o kątach czworokąta wpisanego w okrąg, itp. Ten etap pracy studentów można powiązać z próbami znalezienia szukanych kątów x i y, które to próby dość szybko powinny doprowadzić do znalezienia równania $x + y = 70°$. W tej fazie pracy dyskusja ze studentami pozwoli jasno nakreślić plan działań i określić bezpośredni cel poszukiwań: znaleźć drugie równanie wiążące ze sobą niewiadome kąty x i y, a następnie rozwiązać otrzymany układ równań.



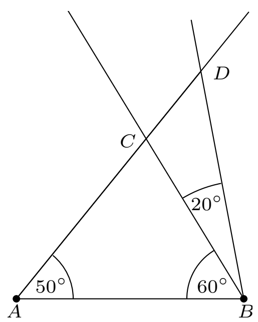
Rysunek 1



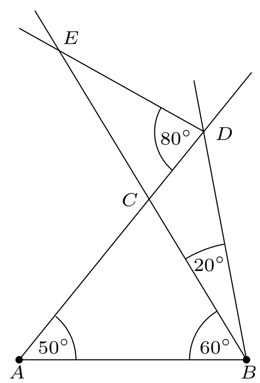
Rysunek 2



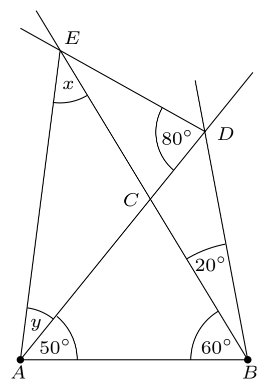
Rysunek 3



Rysunek 4



Rysunek 5



Rysunek 6

Komentarz. Ten etap pracy służy powtórzeniu różnych wiadomości dotyczących twierdzeń geometrycznych związanych z kątami. Na początku przypominamy te najprostsze, w których w sposób istotny występują tylko kąty, a dopiero potem przechodzimy do przypomnienia twierdzeń bardziej złożonych, np. dotyczących związków między kątami w kole lub kątami wielokąta wpisanego w koło. Rola nauczyciela polega tu na kontrolowaniu poprawności sformułowań przypominanych przez studentów twierdzeń i na zwracaniu uwagi, że trzeba zbadać, czy są spełnione założenia twierdzeń, na które chcieliby się powołać. Na końcu tej fazy rozwiązywania zadania byłoby dobrze przypomnieć twierdzenia dotyczące związków między bokami i kątami w trójkącie (twierdzenie sinusów i twierdzenie kosinusów), cech przystawania oraz cech podobieństwa trójkątów, zwracając jednakże uwagę, że w zadaniu, które rozwiązują, nie są dane długości boków. O ile wiadomości dotyczące tylko zależności między kątami rozważanej figury (rys. 6) nie pozwolą studentom na rozwiązanie zadania, a wszelkie próby wykorzystania w rozmaity sposób wymienionych wyżej twierdzeń dotyczących kątów zakończą się niepowodzeniem, prowadząc uczniów zawsze do tego samego równania $x + y = 70°$, prowadzący zajęcia może ten etap pracy zakończyć niezbyt optymistyczną konkluzją, że jak na razie, to nie potrafimy zadania rozwiązać.

Sytuacja 3
Czy o takie rozwiązanie chodzi?

Prowadzący stawia pytanie, czy można zaakceptować następujący sposób rozwiązania: Jeden ze studentów sporządził na papierze milimetrowym rysunek (rys. 6, tak jak w sytuacji 1), bardzo starannie, z wykorzystaniem kątomierza i linijki, a następnie za pomocą kątomierza zmierzył kąty x i y tak dokładnie, jak tylko to było możliwe. Odczytany na kątomierzu wynik to $x = 40°$ i $y = 30°$. Czy to jest rozwiązanie, o które chodzi?

Komentarz. Przedstawione wyżej rozwiązanie jest rozwiązaniem przybliżonym, i w pewnych sytuacjach rzeczywistych takie rozwiązania nas zadawalają. Jednak formułując problem w języku matematyki szukamy rozwiązania dokładnego, a nie rozwiązania przybliżonego i podany sposób może, co najwyżej, być podstawą do sformułowania hipotezy, że $x = 40°$ i $y = 30°$.

Sytuacja 4
Modyfikacja treści zadania.

Ponieważ próby rozwiązania zadania zakończyły się niepowodzeniem, prowadzący proponuje modyfikację zadania, polegającą na dodaniu warunku, że znana jest długość odcinka AB. Zwraca uwagę na fakt, że przy sporządzaniu rysunku każdy może wybrać odcinek AB innej długości, stąd rysunki różnych osób mogą się różnić. Czy wobec tego kąty x i y też będą różne? Chodzi o to, aby studenci uświadomili sobie, że otrzymane figury będą podobne, a co za tym idzie odpowiednie kąty będą równe, czyli zadanie będzie miało jedno rozwiązanie niezależnie od wyboru odcinka AB. Po dyskusji studenci decydują się na zastosowanie twierdzenia sinusów do trójkąta ACE, obliczają stosunek $\frac{\sin x}{\sin y}$, wyrażając długości boków AC i CE przez długość odcinka AB i wartości funkcji trygonometrycznych danych kątów. Uzyskany wynik budzi zdziwienie, stosunek $\frac{\sin x}{\sin y}$ nie zawiera długości odcinka AB. Studenci stwierdzają, że zaplanowane znalezienie drugiego równania, wiążącego x i y, udało się, chociaż w tym drugim równaniu niewiadome występują jako argumenty funkcji trygonometrycznych. Ostatecznie na tym etapie rozwiązanie wyjściowego problemu sprowadza się do rozwiązania układu równań:

$$x + y = 70^\circ \qquad \text{i} \qquad \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 20^\circ \sin 70^\circ}.$$

Komentarz. Wobec tego, że wyjściowego zadania w pierwszych próbach nie udało się rozwiązać, prowadzący proponuje jego modyfikację. Polega ona na przyjęciu dodatkowego założenia, że dana jest długość odcinka AB i pozwala w efekcie zrealizować pierwotnie wytyczony plan rozwiązania, który polegał na znalezieniu drugiego równania wiążącego niewiadome x i y. Ze względu na potrzebę porównywania wyników obliczeń wykonywanych przez poszczególnych uczniów, nauczyciel powinien wprowadzić jednoliterowe oznaczenia na długości poszczególnych odcinków, co ułatwia zapisy i przekształcanie wzorów. Wprowadzona dodatkowa wielkość – długość odcinka AB, pozwoli zastosować twierdzenie sinusów, ale nie występuje w ostatecznym wzorze wyrażającym stosunek $\frac{\sin x}{\sin y}$. Ten sposób postępowania, polegający na przyjęciu dodatkowych danych, które mogą nie wystąpić w ostatecznym wyniku, jest często stosowany w różnych rozumowaniach matematycznych i zasługuje na zwrócenie na niego uwagi. Bardzo często studenci uważają w tym momencie, że problem wyjściowy został już prawie rozwiązany, bo znaleźliśmy drugie równanie wiążące niewiadome x i y.

Sytuacja 5

Zapoznanie się z metodą rozwiązywania układów równań postaci $x + y = \alpha$ i $\frac{\sin x}{\sin y} = k$.

Prowadzący, kierując do studentów odpowiednie pytania, zwraca ich uwagę na fakt, że otrzymany w poprzednim etapie układ równań nie jest układem równań trygonometrycznych (w jednym z równań niewiadome nie występują jako argumenty funkcji trygonometrycznych) i wobec tego powstaje pytanie, jak taki układ równań rozwiązać. Pada propozycja, aby odszukać sposoby rozwiązywania takich układów równań w literaturze dotyczącej trygonometrii. Nauczyciel proponuje lekturę (Nowosiołow, 1956, s. 281) wybranym studentom, którzy przygotowują referat prezentujący sposób rozwiązania tego typu układu równań oraz liczne przykłady. Następnie stosują nowo poznany sposób postępowania do rozwiązania otrzymanego w poprzednim etapie układu. Prowadzi to do układu równań postaci:

$$x + y = 70^\circ \qquad \text{i} \qquad \operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{k-1}{k+1}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2},$$

gdzie $k = \frac{\sqrt{3}}{4\sin 20^\circ \sin 70^\circ}$, który wydaje się już znacznie prostszy niż poprzedni, ponieważ w drugim równaniu, po prawej stronie są już tylko wielkości dane w zadaniu.

Komentarz. Układy równań, z których tylko jedno jest równaniem trygonometrycznym, nie są przewidziane w programach szkolnych. Jest to okazja, aby prowadzący zachęcił studentów do samodzielnej lektury. Pozwoli to zainteresowanym na zapoznanie się z metodą rozwiązywania takich układów i zaprezentowanie rezultatów własnych studiów nad tym problemem pozostałym kolegom. Tego typu układy równań pojawiają się w pewnych problemach geodezyjnych (tzw. zadanie Pothenota, Nowosiołow, 1956, s. 397). Wdrażanie do samodzielnej lektury matematycznej, połączone z możliwością sprawdzenia się, przez zreferowanie studiowanej problematyki na forum grupy, jest ważnym elementem wdrażania w tryb pracy naukowej.

Sytuacja 6
Rozwiązanie przybliżone układu równań.

W tej fazie pracy nad rozwiązaniem wyjściowego zadania prowadzący organizuje dyskusję na temat niezbędnych obliczeń, które trzeba wykonać, aby układ rozwiązać. Zwraca uwagę studentów na to, że wartości funkcji trygonometrycznych kątów występujących w otrzymanych formułach są liczbami niewymiernymi i w obliczeniach trzeba będzie się posługiwać ich przybliżeniami. Spowoduje to, że otrzymany wynik będzie pewnym przybliżeniem wartości dokładnej. Studenci wykonują obliczenia, posługując się kalkulatorem naukowym, i otrzymują rozwiązanie przybliżone, np:

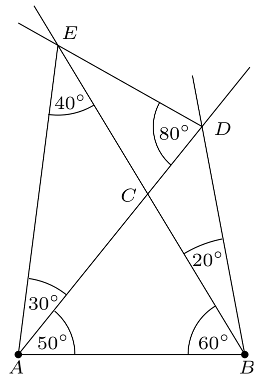
$$x = 39^\circ 57' 53'' \qquad \text{i} \qquad y = 30^\circ 2' 7''.$$

Komentarz. Ta faza pracy stanowi okazję do przypomnienia zagadnień związanych z zastosowaniem kalkulatora do wykonywania obliczeń numerycznych, można też związać ten fragment z wykorzystaniem tablic logarytmicznych oraz zwrócić uwagę na postęp, jaki się dokonał w dziedzinie obliczeń numerycznych w ostatnich trzydziestu latach. Można wreszcie od strony praktycznej przypomnieć zasady rachunku przybliżonego, a od strony teoretycznej powtórzyć wiadomości o podzbiorach zbioru liczb rzeczywistych, dyskutując zagadnienia mocy podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych (np. można stawiać pytania, który podzbiór zbioru wartości funkcji sinus ma większą moc: zbiór wartości wymiernych czy niewymiernych). Po tej fazie pracy studenci powinni uświadamiać sobie, że wyjściowe zadanie mimo wszystko nie zostało rozwiązane, a przeprowadzone próby jego rozwiązania doprowadziły do sformułowania przynajmniej dwóch hipotez: pierwsza, że szukane kąty wynoszą odpowiednio 40° i 30°, druga, że szukane kąty wynoszą odpowiednio $x = 39°57'53''$ i $y = 30°2'7''$.

Sytuacja 7

Obserwacja rysunku przy hipotezie dotyczącej wartości szukanych kątów.

Prowadzący stawia najpierw pytanie, czy z faktu, że miary wszystkich podanych w zadaniu wyjściowym kątów to pełne dziesiątki stopni kątowych, wynika, że szukane kąty też muszą mieć tę własność? Poprawna odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Następne pytanie: gdyby szukane kąty x i y na rysunku 6 zastąpić konkretnymi wartościami, np. takimi jak w pierwszej lub w drugiej hipotezie (sytuacja 6), to czy obserwacje tak uzupełnionych rysunków pozwoliłyby nam odkryć coś nowego, np. znaleźć związki, których nie mogliśmy zobaczyć, bez umieszczenia na rysunku wartości konkretnych kątów? Prowadzona dyskusja powinna pozwolić na wniosek, że warto jeszcze raz przeanalizować rysunek 6, zastępując szukane kąty x i y, odpowiednio konkretnymi wartościami 40° i 30° (rys. 7). Uczniowie przystępują do obserwacji.



Rysunek 7

Komentarz. Pierwsze z postawionych przez nauczyciela pytań ma zwrócić uwagę na fakt, że choć miary stopniowe kątów podane w zadaniu wyrażają się pełną liczbą dziesiątek, nie oznacza to, że miary szukanych kątów też muszą mieć taką własność. Drugie pytanie uświadamia studentom, że wprowadzając nowe dane (konkretne wartości szukanych kątów x i y), podajemy dodatkowe informacje o kątach przynajmniej trzech trójkątów: ACE, ADE, ABE. Ta nowa informacja pozwala np. na rozstrzygnięcie pytania, czy na rysunku 7 pojawiły się trójkąty podobne (poprzednio, gdy nie zakładaliśmy nic o kątach x i y, takich trójkątów nie było widać). Jest też widoczne, że przy założeniu, że miary kątów x i y wynoszą odpowiednio: $x = 39°57'53''$ i $y = 30°2'7''$, nie mamy żadnej szansy na zaobserwowanie trójkątów podobnych, (bo na odpowiednim rysunku poza tymi dwoma kątami są tylko takie kąty, których miarami stopniowymi są pełne dziesiątki). Szansę na zaobserwowanie ewentualnych trójkątów podobnych mamy przy założeniu, że $x = 40°$ i $y = 30°$. Proponujemy więc takie obserwacje.

Sytuacja 8
Gdy $x = 40°$ i $y = 30°$, to trójkąty ADE i EDC są podobne. Czy można to odwrócić? Czy można wykazać podobieństwo tych trójkątów bez odwoływania się do założenia, że $x = 40°$ i $y = 30°$?

Proponując obserwację rysunku 7, nauczyciel spodziewa się, że studenci zauważą podobieństwo trójkątów ADE i EDC, z uwagi na równe kąty. Ponieważ cechy podobieństwa są warunkami koniecznymi i wystarczającymi, więc natychmiast otrzymujemy wniosek, że podobieństwo trójkątów ADE i EDC pociąga za sobą równość odpowiednich kątów, co w konsekwencji oznacza, że $x = 40°$ i $y = 30°$. W tym momencie trzeba wyraźnie przypomnieć, że w sformułowaniu wyjściowego zadania nie zakładaliśmy podobieństwa trójkątów ADE i EDC, a ostatnie rozumowanie ma charakter hipotetyczny: gdybyśmy wiedzieli, że trójkąty ADE i EDC są podobne, to moglibyśmy wnioskować, że $x = 40°$ i $y = 30°$. Nauczyciel podsumowuje ten etap pracy stwierdzając, że gdybyśmy np. z innego źródła uzyskali informację, że trójkąty ADE i EDC są podobne, to moglibyśmy wnioskować, że $x = 40°$ i $y = 30°$. Ale na razie takiej informacji nie mamy.

Komentarz. Sytuacja jest delikatna, bowiem rozumowania mają charakter hipotetyczny i w zamierzeniu prowadzącego powinny sprowokować do postawienia pytania, czy nie można uzyskać informacji o podobieństwie trójkątów ADE i EDC z innego źródła, bez korzystania z przesłanki, że $x = 40°$ i $y = 30°$. Można się tu odwołać do przypomnianych uprzednio (sytuacja 2) twierdzeń o podobieństwie trójkątów. Jeżeli studenci nie sformułują takiego pytania, nauczyciel sam je postawi, a w przypadku gdyby mieli trudności z odpowiedzią, zasugeruje wykorzystanie cech podobieństwa trójkątów, czy wreszcie zwróci ich uwagę na fakt, że trójkąty ADE i EDC mają wspólny kąt o wierzchołku D. Powołanie się w tym miejscu na odpowiednią cechę podobieństwa trójkątów pozwoli stwierdzić, że wystarczy wiedzieć, że zachodzi $\frac{AD}{DE} = \frac{ED}{DC}$, aby móc wnioskować, iż trójkąty ADE i EDC są podobne, co z kolei pozwoliłoby wnioskować, że $x = 40°$ i $y = 30°$.

Sytuacja 9
Jak wykazać, że zachodzi $\frac{AD}{DE} = \frac{ED}{DC}$?

Sytuacja, w której znajdują się teraz studenci, jest podobna do opisanej w sytuacji 4. Wykorzystując tamto doświadczenie, studenci powinni zaproponować następujący sposób postępowania: wyrazić kolejno długości odcinków AD, DE, ED i DC przez długość odcinka AB oraz dane w zadaniu wyjściowym kąty. Jeżeli okaże się, że zachodzi równość, to zadanie wyjściowe zostało rozwiązane i rzeczywiście $x = 40°$ i $y = 30°$.

Komentarz. Część obliczeń, potrzebnych do wykazania równości $\frac{AD}{DE} = \frac{ED}{DC}$ została już wykonana uprzednio (sytuacja 4), pozostałe nie są trudne. Tak jak poprzednio nauczyciel powinien zaproponować krótkie oznaczenia literowe na długości poszczególnych odcinków, aby ułatwić porównywanie wyników obliczeń prowadzonych przez poszczególnych studentów.

Sytuacja 10
Rzut oka wstecz, rzut oka w przód.

Jako zakończenie prac nad rozwiązywaniem wyjściowego zadania nauczyciel proponuje zwięzłe zredagowanie zadania i jego rozwiązania oraz analizę napotkanych w trakcie rozwiązywania trudności i sposobów ich pokonywania. Po dyskusji plan opisu rozwiązania mógłby być następujący:

1. Sformułowanie zadania
2. Stwierdzenie, że wystarczy wykazać podobieństwo trójkątów ADE i EDC, aby wnioskować, iż $x = 40°$ i $y = 30°$.
3. Dowód (taki, jak w sytuacji 8), że trójkąty ADE i EDC są podobne.

Prowadzący zwraca uwagę, że przy takim sposobie prezentacji rozwiązania nie wiadomo, dlaczego należało wykazać podobieństwo trójkątów ADE i EDC. Wprowadza rozróżnienie między „gotową matematyką" a matematyką rozumianą jako działalność matematyczna. Stawia pytania o rolę danych w zadaniu wyjściowym kątów, których konkretne wartości w znalezionym rozwiązaniu są istotne, o ewentualne związki i zależności między tymi kątami, które powinny być spełnione, jeżeli chcielibyśmy, aby znaleziony sposób rozwiązania wyjściowego zadania był także skuteczny przy innych danych.

Komentarz. Rzut oka wstecz na drogę przebytą podczas rozwiązywania problemu jest jednym z ważniejszych elementów kształcenia w zakresie metod heurystycznych (Polya, 1978) dotyczących rozwiązywania problemów. We współczesnej dydaktyce matematyki nie mniejszą wagę przywiązuje się do aktywnej refleksji wybiegającej wprzód, pozwalającej na stawianie nowych zagadnień inspirowanych rozwiązanym problemem. Ostatnia omawiana sytuacja dydaktyczna jest poświęcona właśnie tym dwóm aspektom procesu rozwiązywania wyjściowego problemu.

3. Kąty Langleya – prezentacja problemu i jego wariantów

W 1923 roku w czasopiśmie *Mathematical Gazette* (Mercer, et al., 1923) opublikowano rozwiązanie tzw. problemu kątów Langleya. Zadanie sformułowano następująco:

Zadanie 1
Trójkąt ABC jest równoramienny, kąty przy wierzchołkach B i C są równe $80°$*. Prosta CF poprowadzona pod kątem* $30°$ *do AC przecina AB w F. Prosta BE poprowadzona pod kątem* $20°$ *do AB przecina AC w E. Udowodnić, że kąt BEF jest równy* $30°$.

Zauważmy przede wszystkim, że samo sformułowanie pytania (*Udowodnić, że kąt BEF jest równy* $30°$) powoduje, że zadanie jest tzw. zadaniem zamkniętym ze względu na szukaną wielkość, zadaniem typu „udowodnij, że”, co znacznie ogranicza jego aktywizujące walory. Znacznie bardziej aktywizujące byłoby sformułowanie: znaleźć kąt BEF.

Zaprezentowane rozwiązanie rozpoczyna się tak:

Aby udowodnić, że kąt BEF jest równy $30°$, *wystarczy wykazać, że trójkąty rozwartokątne ACF i BEF są podobne* (rys. 8). *Do tego wystarczy udowodnić, że* $\frac{AC}{AF} = \frac{BE}{BF}$.

Następnie dowodzi się, przyjmując BC jako parametr i wykorzystując twierdzenie sinusów oraz proste tożsamości trygonometryczne, że ostatnia równość zachodzi. Nie pojawia się żadna sugestia, skąd wiadomo, że te właśnie trójkąty powinny być podobne. Jest to, moim zdaniem, typowy przykład prezentowania „gotowej matematyki” w postaci rozwiązania postawionego wyżej problemu. Można oczywiście, analizując takie rozwiązanie, zadać sobie pytanie, jak Autorzy doszli do wniosku, że ten sposób postępowania prowadzi do celu. Dlaczego zwrócili uwagę na te właśnie, a nie inne trójkąty? Takie postępowanie byłoby na pewno kształcące, jeżeli chodzi o rozwijanie umiejętności analizy gotowych rozwiązań. Jednak prezentowanie tylko „gotowych” rozwiązań problemów zubaża możliwości podejmowania przez studentów różnych rodzajów aktywności matematycznej, stawia ich w sytuacji „konsumentów” twórczej aktywności innych, pozbawia szansy na osobiste przeżycie elementów twórczości matematycznej. A bez tego osobistego doświadczenia właśnie w dziedzinie matematycznej twórczości, choćby na małą skalę, nie będą w stanie tak pokierować w przyszłości pracą swoich uczniów, aby umożliwić im podobne doznania intelektualne.

Zadania oparte na problemie kątów Langleya pojawiają się w różnych wersjach w zbiorach zadań. Np. w pracy (Лидский, Овсянников, Тулайков, Шабунин, 1965, s. 57, zad. 348) sformułowane jest następujące:

Zadanie 2
W trójkącie równoramiennym ABC kąt przy wierzchołku B wynosi $20°$. *Na ramionach AB i BC wybrano odpowiednio punkty Q i P tak, że* $\angle ACQ = 60°$, *a* $\angle CAP = 50°$. *Wykazać, że* $\angle APQ = 80°$.

Tutaj również sformułowanie pytania w zadaniu (*Wykazać, że* $\angle APQ = 80°$) stawia osobę rozwiązującą w roli ucznia, poszukującego odpowiedzi na pytanie, na które nauczyciel zna odpowiedź, a uczeń ma ją tylko uzasadnić. Podane przez Autorów dwa rozwiązania tego zadania też nie mówią, skąd wiadomo, że szukany kąt wynosi $80°$.

Rozwiązanie I. Na rysunku (rys. 9) zaznaczono te wartości kątów, które są oczywiste. Na boku BC wybieramy punkt Q' tak, aby $AC \parallel QQ'$ oraz punkt N – jako punkt przecięcia AQ' i QC. Wykażemy, że $QP \perp AQ'$. Istotnie, $NC = AC$ oraz $AC = PC$, ponieważ trójkąt ACP jest równoramienny. Stąd $NC = PC$, czyli trójkąt NCP jest równoramienny, zatem $\angle CNP = \angle NPC = 80°$. Stąd łatwo wnioskujemy, że $\angle Q'NP = 180° - 60° - 80° = 40°$, czyli $\angle NQ'P = 40°$, a więc trójkąty $QQ'P$ i QNP są przystające. Stąd wynika, że $QP \perp AQ'$. Teraz już widać, że $\angle Q'PQ = 50°$ i w konsekwencji $\angle QPA = 180° - 50° - 50° = 80°$.

Ten sam pomysł rozwiązania podaje też C. Trigg (1975, s. 167, zad. 227).

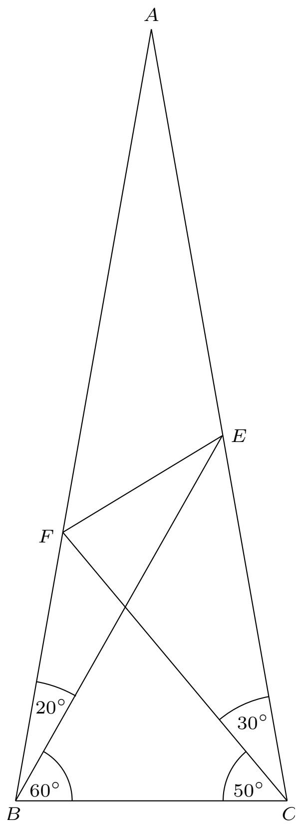
Z naszego punktu widzenia i to rozwiązanie trzeba ocenić jako prezentację „gotowej matematyki". Autorzy nie objaśniają, dlaczego wybrali punkt Q' tak, aby $AC \parallel QQ'$, ani też nie uzasadniają, dlaczego wykażą, że $QP \perp AQ'$. Zaprezentowane rozumowanie jest poprawne, ale nic nie mówi o genezie pomysłu, co byłoby istotne dla kształcenia umiejętności atakowania problemów.

Rozwiązanie II. Autorzy piszą:

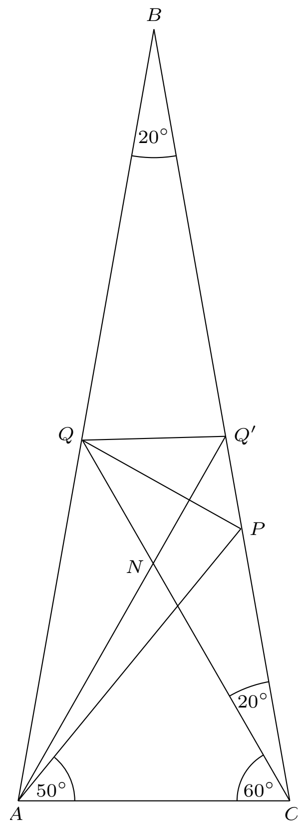
> Łatwo zauważyć (rys. 10), że $\angle QPA = 80°$ wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty ABP i PCQ są podobne. Wykażemy, ze istotnie tak jest. Biorąc pod uwagę równość kątów ABP i PCQ, wystarczy sprawdzić, czy zachodzi równość
>
> $$\frac{AB}{CQ} = \frac{PB}{CP} \tag{1}$$
>
> Oznaczmy $AB = l$, wówczas z trójkąta równoramiennego CQB otrzymujemy $CD = \frac{1}{2\cos 20°}$. Z drugiej strony, ponieważ $PC = AC$, więc $PC = 2l \sin 10°$, a $BP = l - 2l \sin 10°$. Podstawiając te wartości do równości (1) otrzymujemy równoważne wyrażenie
>
> $$4 \sin 10° \cos 20° = l - 2l \sin 10°. \tag{2}$$

Prawdziwość tej ostatniej równości wynika z faktu, że

$$\sin 10^\circ \cos 20^\circ = \frac{\sin(10^\circ + 20^\circ) + \sin(10^\circ - 20^\circ)}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin 10^\circ.$$



Rysunek 8



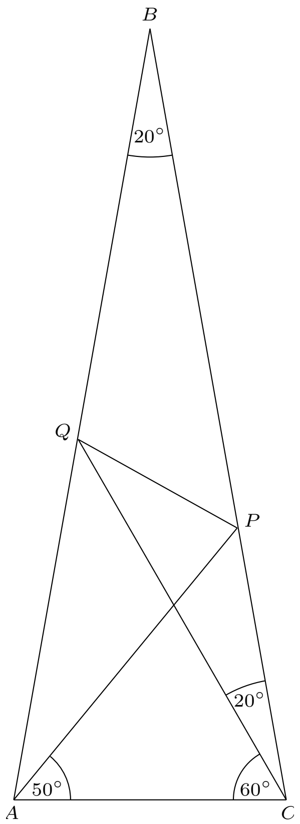
Rysunek 9

Istotnie, podobieństwo trójkątów ABP i PCQ łatwo zauważyć, gdy założymy, że szukany kąt wynosi 80°, co wynika ze sformułowanego w tekście zadania pytania. Jednak z zaprezentowanego rozwiązania nie widać, skąd Autorzy zadania doszli do wniosku, że tyle właśnie wynosi szukany kąt.

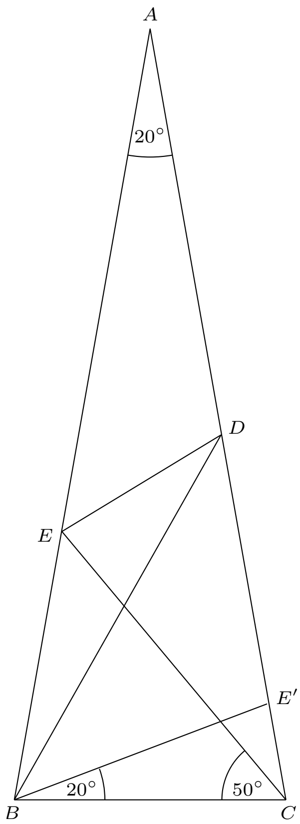
Inny wariant tego zadania omawia D. Wells w (2000, s. 309):

Zadanie 3

W trójkącie równoramiennym ABC (rys. 11), kąt przy wierzchołku A wynosi 20°. Na ramionach AB i AC wybrano punkty E i D tak, że $\angle BCE = 50^\circ$, a $\angle CBD = 60^\circ$. Znaleźć kąt $\angle BDE$.



Rysunek 10



Rysunek 11

Autor sugeruje dorysowanie odcinka BE', gdzie E' jest takim punktem na odcinku AC, że $\angle E'BC = 20°$, zaś w innej jego pracy (Wells, 2002, s. 394), podane jest następujące, oparte na tym pomyśle, rozwiązanie:

> Niech E' jest takim punktem na odcinku AC, że $\angle E'BC = 20°$. Wtedy trzy trójkąty: EBC, $BE'C$ i $DE'B$ będą równoramienne. Zatem trójkąt BEE' będzie równoboczny, a trójkąt $EE'D$ równoramienny. Ale $\angle DE'E = 40°$, stąd $\angle BDE + 40° = 70°$, czyli $\angle BDE = 30°$.

O ile sformułowanie zadania jest tutaj bardziej otwarte niż w poprzednio omawianej wersji, gdyż Autor nie podpowiada, jaka jest wielkość kąta BDE, to droga prowadząca do znalezienia pomysłu rozwiązania jest tutaj tak samo niewidoczna, jak w poprzednio cytowanych rozwiązaniach. W szczególności nie widać, skąd pojawia się pomysł dorysowania odcinka BE'.

Tekst zadania, które było przedmiotem rozważań w pierwszej części artykułu, nie został formalnie sformułowany. Możemy to teraz uzupełnić, jako zadanie 4.

ZADANIE 4
Na rysunku (rys. 6) przedstawiono dane kąty $50°$, $60°$, $20°$, $80°$. *Znaleźć zaznaczone kąty* x *i* y.

Przeprowadzone wcześniej rozumowania i otrzymany wynik ($x = 40°$, $y = 30°$) nasuwają pomysł, aby do równania $x + y = 70°$ dołączyć drugie równanie (np. takie, jak otrzymane w sytuacji 4) i podjąć próbę rozwiązania tego układu, stosując odpowiednie tożsamości trygonometryczne.

Istotnie, przyjmijmy oznaczenia z rys. 6 oraz $AB = BD = a$ i $BE = b$. Stosując twierdzenie sinusów do trójkątów BED i ABE, otrzymujemy odpowiednio:

$$\frac{a}{\sin 30°} = \frac{b}{\sin 130°} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{a}{\sin x} = \frac{b}{\sin (y + 50°)}.$$

Eliminując z tych równań a i b oraz uwzględniając warunek $x + y = 70°$, otrzymujemy równanie

$$2 \sin 50° \sin x = \sin (120° - x).$$

Stosując odpowiednie tożsamości trygonometryczne mamy:

$$2 \cos 40° \sin x = \sin (120° - x),$$

$$\sin (x + 40°) + \sin (x - 40°) = \sin (120° - x),$$

$$\sin (x - 40°) = 2 \cos 80° \sin (40° - x),$$

$$\sin (x - 40°) \cdot [1 + 2 \cos 80°] = 0.$$

Wobec tego, że $1 + 2 \cos 80^0 \neq 0$, otrzymujemy: $\sin (x - 40^0) = 0$. Z warunków zadania wynika, że $x = 40^0$, a zatem $y = 30^0$.

4. Uwagi końcowe

W matematycznym kształceniu, na wszystkich jego poziomach, rozwiązujemy zadania. Warto sobie uświadomić, że wszystkie te zadania, wykorzystywane w nauczaniu matematyki, ktoś już przed nami rozwiązywał, rozwiązał, i głównym powodem, dla którego pojawiają się one w procesie matematycznego kształcenia nie jest konieczność znalezienia ich rozwiązań, bo te są już znane. Zadania te są raczej narzędziem do rozwijania naszej umiejętności poszukiwania rozwiązań, okazją do refleksji nad przyczynami sukcesów w tym procesie i analizy powodów porażek. Są okazją do wypracowywania własnych reguł heurystycznych, uświadamiania sobie ogólniejszych sposobów postępowania w sytuacjach problemowych i możliwości racjonalizacji tych sposobów. Dopiero taka aktywność, oparta na głębokiej refleksji nad samym procesem poszukiwania rozwiązań, nad przyczynami porażek i pomysłami prowadzącymi do sukcesu, i to zarówno w przypadku zadań zamkniętych, jak i problemów otwartych, nawet na poziomie szkolnej matematyki, nadaje sens rozwiązywaniu zadań w procesie matematycznego kształcenia. Ważna jest tu nie liczba zadań, rozwiązanych na zajęciach, lecz jakość aktywności, które podejmujemy wokół procesu poszukiwania rozwiązań. Bez tej aktywności rozwiązywanie nawet wielu zadań w trakcie zajęć z matematyki, nie spełni swej zasadniczej roli kształcącej i będzie tylko stratą czasu.

Literatura

Klakla, M.: 1991, Quelques remarques sur l'enseignement des mathématiques basé sur le developpement des activités mathématiques, w: M. Ciosek (red.), *Le metier d'enseignant de mathématiques dans un monde qui change. Compte rendue de la 42e rencontre internationale de CIEAEM*, 344-346.

Klakla, M.: 2002, Kształcenie aktywności matematycznej o charakterze twórczym na poziomie szkoły średniej, w: J. Żabowski (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, t. III*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 263-273.

Konior, J.: 2002, Tekst matematyczny i jego lektura; nauka czytania tekstów matematycznych w szkole, w: J. Żabowski (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, tom IV*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 251-375.

Krygowska, Z.: 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 25-41.

Лидский, В. Б., Овсянников, Л. В., Тулайков, А. Н., Шабунин, М. И.: 1965, Задачи по елементарной математикие, Издателцтво НАУКА, Москва.

Mercer, J. W., et al.: 1923, Solutions to Langley's adventitious angles problem, *Mathematical Gazette* **11**, 321-323.

Moszner, Z.: 2004, Refleksje na temat kształcenia nauczycieli matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 255-264.

Nowecki, B. J.: 1984, Różne aspekty aktywności, *Oświata i wychowanie* **7** (Wersja B), 26-30.

Nowecki, B. J.: 2004, Koncepcja kształcenia nauczycieli, w: Z. Kruszewski (red.), *Nauczyciel wobec współczesnych wyzwań edukacyjnych, Materiały z konferencji zorganizowanej przez Komisję Nauki, Edukacji i Sportu Senatu RP w dniu 9 grudnia 2003 r.*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 35-42.

Nowosiołow, S. I.: 1956, *Specjalny wykład trygonometrii*, PWN, Warszawa.

Pardała, A.: 1995, *Wyobraźnia przestrzenna uczniów w warunkach nauczania szkolnej matematyki. Teoria, Problemy, Propozycje*, Wyd. Oświatowe FOSZE, Rzeszów.

Polya, G.: 1978, *Jak to rozwiązać?*, Wyd. Problemy, Warszawa.

Servais, W.: 1956, Raport général sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires, *XIX conférence internationale de l'instruction publique*, BIE, Génève.

Trigg, C.: 1975, Задачи с изюминкой, изда. Мир, Москва.

Wells, D.: 2000, *I ty zostaniesz matematykiem*, Zysk i S-ka, Poznań.

Wells, D.: 2002, *Cudowne i interesujące łamigłówki matematyczne*, Zysk i S-ka, Poznań.

Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: smklakla@ap.krakow.pl