Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis

Folia 36 Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia I (2006)

Jan Górowski, Adam Łomnicki

O cechach podzielności liczb i odkrywaniu twierdzeń

Abstract. The paper contains some theorems (with proofs) from numbers divisibility theory, and suggestions how to use them in the process of teacher training, which provide good opportunities for developing students' creative attitude in the process of discovering new facts in elementary mathematics.

Stymulowanie aktywnej postawy ucznia – na każdym poziomie kształcenia – jest jedną z cech nowoczesnego procesu nauczania. Zwłaszcza na studiach nauczycielskich matematyki, typową składową takiej postawy jest poznawanie i analizowanie twierdzeń i poszukiwanie ich dowodów. W artykule tym postaramy się wzbogacić argumenty tych dydaktyków matematyki, którzy uważają, że dostępne jest dla ucznia również odkrywanie twierdzeń. Materiałem przywołanym do ilustracji tej tezy będą znane lub nieznane cechy podzielności liczb, które można rozważać – naszym zdaniem – ze studentami matematyki w ramach „Teorii podzielności w pierścieniach całkowitych” lub z bardziej zainteresowanymi matematyką uczniami liceów ogólnokształcących. Prawie wszystkie podane poniżej twierdzenia i ich dowody zostały odkryte dla potrzeb tego artykułu. Nie twierdzimy, że w dobie komputerów i powszechnie używanych kalkulatorów omawiane cechy podzielności są przydatne w praktyce, ale mogą stanowić wdzięczny materiał do budzenia zainteresowań matematyką. Pokazują, że każdy może być odkrywcą.

Przypuśćmy, że ktoś chciałby nas przekonać o podzielności liczby 317366 przez 7 następującym rozumowaniem:

$$\begin{aligned}\text{Liczę:}\qquad 31736 - 2\cdot 6 &= 31724,\\ 3172 - 2\cdot 4 &= 3164,\\ 316 - 2\cdot 4 &= 308,\\ 30 - 2\cdot 8 &= 14.\end{aligned}$$

Ponieważ 14 jest podzielne przez 7, więc i liczba 317366 jest podzielna przez 7.

Patrząc na podane obliczenia można odgadnąć algorytm, według którego były prowadzone. Sformułowanie tego algorytmu oczywiście nie daje podstaw do oceny poprawności rozumowania, bo odpowiedniego twierdzenia najczęściej nie znamy.

Oto to twierdzenie sformułowane w postaci ogólnej oraz jego dowód.

Twierdzenie 1
Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$ *liczba postaci* $10a+b$ *jest podzielna przez* 7 *wtedy i tylko wtedy, gdy liczba* $a-2b$ *jest podzielna przez* 7.

W całym artykule przyjmujemy, że $0 \in \mathbb{N}$, a $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych.

Twierdzenie to można znaleźć (wraz z dowodem opierającym się na subtelnym wykorzystaniu relacji przystawania modulo 7) pod nazwą twierdzenie Żbikowskiego w książce *Opowieści matematyczne* (Szurek, 1987, 36-37). Refleksja po jego lekturze prowadzić może do myśli: dziwna cecha, pomysłowy dowód, przypadek szczególny, więc nie do powielenia, mało przydatne w zastosowaniach, na jakiej drodze odkryte, można je zrozumieć, ale warto chyba zapomnieć.

Uzyskaliśmy elementarny dowód twierdzenia Żbikowskiego, który otwiera drogę do dowodzenia podobnych cech, a nawet do ich odkrywania.

Dowód I twierdzenia 1. Zauważmy najpierw, że

$$7 \mid (10a+b) \iff 7 \mid (1000a+100b)$$

oraz

$$7 \mid (a-2b) \iff 7 \mid (10a-20b),$$

ponieważ

$$1000a+100b = 100(10a+b), \quad 10a-20b = 10(a-2b),$$

a zarówno 100, jak i 10 są względnie pierwsze z 7.

Załóżmy, że $7 \mid (10a+b)$. Wtedy $7 \mid (1000a+100b)$, a ponieważ $7 \mid ((1000a+100b)+(a-2b))$, gdyż $1000a+100b+a-2b = 1001a+98b = 7(143a+14b)$, to $7 \mid (a-2b)$.

Przyjmijmy teraz, że $7 \mid (a-2b)$. Wtedy $7 \mid (10a-20b)$, a ponieważ $7 \mid ((10a-20b)-(10a+b))$, gdyż $10a-20b-(10a+b) = -21b = 7 \cdot (-3b)$, to $7 \mid (10a+b)$.

W cytowanej książce (Szurek, 1987) podana jest również, wraz z dowodem, następująca cecha podzielności przez 7; nazwijmy ją twierdzeniem 2.

Twierdzenie 2
Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$ *liczba* $100a+b$ *jest podzielna przez* 7 *wtedy i tylko wtedy, gdy liczba* $a+4b$ *jest podzielna przez* 7.

Można postawić pytanie, czy poznanie dowodu I twierdzenia 1 wystarczająco sugeruje, jak udowodnić twierdzenie 2.

Matematycy rzadko zdradzają, co było źródłem odkrycia danego twierdzenia lub jego dowodu. Niektórzy zapewne nad tym się nie zastanawiali, inni nie chcieli odkryć źródła, z którego można jeszcze czerpać, jeszcze inni mogli uważać, że zaskakujące (i z pozoru nieintuicyjne) rozumowanie przydaje walorów ich twórczości. Dydaktycy matematyki, myśląc o ulepszaniu procesu nauczania matematyki, dążą do zmiany takiej sytuacji. Sami też stawiają się w roli matematyków i próbują na drodze autorefleksji ujawniać elementy twórczości matematycznej.

Warto – naszym zdaniem – przy lekturze twierdzeń i ich dowodów (jak wyżej twierdzenia Żbikowskiego) stawiać sobie pytania: jak inaczej udowodnić to twierdzenie (może bardziej elementarnie, np. na poziomie liceum ogólnokształcącego), dlaczego zostało nazwane – co zasłużyło na nadanie nazwy, czy można odkryć podobne twierdzenia, jakiś sposób (sposoby) ich dowodzenia, czy widać zastosowania tych twierdzeń?

Analiza tekstu twierdzeń 1 i 2 oraz ich dowodów sugeruje drogę poszukiwania twierdzeń analogicznych. Od razu zauważamy, że użyte w nich litery a oraz b nie oznaczają cyfr. Zapis konkretnej liczby w systemie dzisiątkowym pozwala ustalić a oraz b, a więc łatwo stosować w praktyce sformułowaną – np. w twierdzeniu 1 – cechę podzielności (nietypowa rekurencja). A więc pożądany w twierdzeniach byłby zapis: po jednej stronie $10a + b$, $100a + b$, $1000a + b$ itp., gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$, a po drugiej $a + b$, $a - b$, $a + 2b$, $a - 2b$, $a + 3b$ itp. (liczba a pozostaje tu ze współczynnikiem 1, bo w praktyce jest liczbą wielocyfrową, a cecha winna być użyteczna). Myśli te prowadzą np. do odkrycia twierdzenia 3 i postawienia pytania o wyraźne wskazanie twierdzeń z teorii liczb, na których opiera się dowód.

Twierdzenie 3

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$ liczba $100a+b$ jest podzielna przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy tę samą własność ma liczba $a - 3b$.

Dowód twierdzenia 3 (mniej szczegółowy od dowodu twierdzenia 1). Mamy

$$7 \mid (100a + b) \iff 7 \mid (1000a + 10b)$$

oraz

$$7 \mid (a - 3b) \iff 7 \mid (100a - 300b).$$

Jeśli $7 \mid (100a+b)$, to $7 \mid (1000a+10b)$, a ponieważ $7 \mid ((1000a+10b)+(a-3b))$, więc $7 \mid (a - 3b)$. Jeśli $7 \mid (a - 3b)$, to $7 \mid (100a - 300b)$, a ponieważ $7 \mid ((100a - 300b) - (100a + b))$, to $7 \mid (100a + b)$.

W istocie w przedstawionych dowodach opieramy się na następujących dwóch twierdzeniach (nietrudnych do udowodnienia w ramach teorii podzielności):

Twierdzenie A
$\bigwedge_{m\in\mathbb{N}_2}\bigwedge_{a,b\in\mathbb{Z}}\ m\,|\,a \implies (m\,|\,(a+b) \iff m\,|\,b).$

Twierdzenie B
$\bigwedge_{m\in\mathbb{N}_2}\bigwedge_{a,b\in\mathbb{Z}}\ \mathrm{NWD}(m,|b|)=1 \implies (m\,|\,ab \iff m\,|\,a).$

$\mathbb{N}_2$ oznacza tu zbiór $\mathbb{N}\cap[2,\infty)$, a $\mathrm{NWD}(x,y)$ – największy wspólny dzielnik podanych liczb naturalnych.

Z pełną świadomością wykorzystania tw. A i tw. B przeanalizujmy jeszcze dowód twierdzenia 4.

Twierdzenie 4
Dla dowolnych $a,b\in\mathbb{N}$*:* $7\,|\,(1000a+b) \iff 7\,|\,(a-b)$.

Dowód twierdzenia 4. Jeśli $7\,|\,(1000a+b)$, to ponieważ $7\,|\,((1000a+b)+(a-b))$, otrzymamy $7\,|\,(a-b)$. Przyjmijmy teraz, że $7\,|\,(a-b)$. Wtedy $7\,|\,(1000a-1000b)$, a ponieważ $7\,|\,((1000a-1000b)-(1000a+b))$, to $7\,|\,(1000a+b)$.

Przeniesienie tej metody rozumowania pozwoliło nam odkryć i udowodnić m.in. następujące cechy podzielności[1]:

Twierdzenie 5
$7\,|\,(1000a+b) \iff 7\,|\,(a-8b).$

Twierdzenie 6
$11\,|\,(10a+b) \iff 11\,|\,(a-b).$

Twierdzenie 7
$11\,|\,(100a+b) \iff 11\,|\,(a+b) \iff 11\,|\,(a-10b).$

Twierdzenie 8
$11\,|\,(1000a+b) \iff 11\,|\,(a-b).$

Twierdzenie 9
$13\,|\,(10a+b) \iff 13\,|\,(a-9b).$

Twierdzenie 10
$13\,|\,(100a+b) \iff 13\,|\,(a-10b) \iff 13\,|\,(a+3b).$

Twierdzenie 11
$13\,|\,(1000a+b) \iff 13\,|\,(a-b).$

Twierdzenie 12
$19\,|\,(10a+b) \iff 19\,|\,(a+2b).$

[1] We wszystkich twierdzeniach zakładamy, że a,b są dowolnymi liczbami naturalnymi.

Twierdzenie 13
$19 \mid (100a + b) \iff 19 \mid (a + 4b).$

Twierdzenie 14
$17 \mid (10a + b) \iff 17 \mid (a - 5b).$

Twierdzenie 15
$17 \mid (100a + b) \iff 17 \mid (a - 9b).$

Twierdzenie 16
$23 \mid (10a + b) \iff 23 \mid (a + 7b).$

Twierdzenie 17
$23 \mid (100a + b) \iff 23 \mid (a + 3b).$

Twierdzenie 18
$29 \mid (10a + b) \iff 29 \mid (a + 3b).$

Twierdzenie 19
$101 \mid (10a + b) \iff 101 \mid (a - 10b).$

Twierdzenie 20
$101 \mid (100a + b) \iff 101 \mid (a - b).$

Twierdzenie 21
$111 \mid (1000a + b) \iff 111 \mid (a + b).$

Twierdzenie 22
$99 \mid (100a + b) \iff 99 \mid (a + b).$

Zauważmy, że to skondensowane sformułowanie kilkunastu twierdzeń może błędnie sugerować, że uczniowie liceów ogólnokształcących lub studenci matematyki w krótkim czasie i bez trudności odkryją te i podobne twierdzenia i ich dowody. W istocie podajemy tylko materiał teoretyczny, rozszerzający wiadomości o kilku szkolnych cechach podzielności lub kongruencjach omawianych na studiach (Białas, 1960, 30-42; Gleichgewicht, 2002, 353-354; Sierpiński, 1969, 138-143), a dopiero eksperyment pozwoliłby postawić i częściowo zweryfikować hipotezy o stopniu trudności tego materiału, o możliwości samodzielnego odkrywania twierdzeń.

Czy elementarny sposób dowodzenia nie może być jeszcze ulepszony?

Świadomie podaliśmy powyżej tylko sformułowania twierdzeń 5-22, by szczegółowymi sugestiami (np. pytaniami do uczniów) nie odwieść Czytelnika od prób samodzielnego szukania dowodów.

Zauważmy teraz, że np. twierdzenia 6, 20, 21, 22 można udowodnić następująco:

Dowód twierdzenia 6. Skoro $11 \mid (10a + b) + (a - b)$, to $11 \mid (10a + b) \iff 11 \mid (a - b)$.

Sposób ten pozwala odkryć nowe cechy podzielności, np. $(1000a + b) + (a - b) = 1001a = 13 \cdot 7 \cdot 11a$, a stąd $7|(1000a + b) \Leftrightarrow 7 \mid (a - b)$ oraz tezy twierdzeń 8 i 11.

Rozumowania te opierają się na – łatwym do udowodnienia – twierdzeniu

$$\bigwedge_{m \in N_2} \bigwedge_{a,b \in Z} m \mid (a + b) \implies (m \mid a \iff m \mid b).$$

Oczywiście twierdzenie to można uważać za inne sformułowanie twierdzenia A. „Rozszerzając" ten sposób rozumowania nietrudno udowodnić np. twierdzenia 1-3 oraz 12-17.

Dowód II twierdzenia 1. Mamy

$$10a + b + 4(a - 2b) = 7 \cdot (2a - b).$$

Skoro

$$7 \mid (10a + b) + 4(a - 2b) \quad \text{oraz} \quad \mathrm{NWD}(4, 7) = 1,$$

to

$$7 \mid (10a + b) \iff 7 \mid (a - 2b).$$

Sposób ten pozwala też odkryć inne cechy podzielności, np. skoro $(1000a + b) - (a + b) = 999a = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$, to $37 \mid (1000a + b) \iff 37 \mid (a + b)$.

Czy przy próbach realizacji ze studentami przedstawionego tematu zaobserwujemy wszystkie opisane aktywności matematyczne? Zapewne nie, nawet gdy stworzymy im warunki do matematycznych poszukiwań, gdy nie będziemy prowadzić ich znaną nam drogą przygotowanych wcześniej i mocno sugerujących odpowiedź pytań. Sukcesem będzie, gdy odkryją, jak można uzasadnić, że przedstawiony na początku artykułu sposób sprawdzania podzielności liczby 317366 przez 7 jest poprawny. Już samo postawienie hipotezy wydaje się cenne. Informacja, że w literaturze matematycznej zaprezentowano ten problem, winna prowokować do sięgnięcia do źródeł.

Sugestia, że warto i można z dobrym skutkiem szukać prostszych dowodów niż spotykane w podręcznikach, kształtuje ważny odruch u studenta matematyki, zwłaszcza przyszłego nauczyciela. Zrozumienie przedstawionych w artykule dowodów i przeprowadzenie analogicznych rozumowań to też sukces, a uproszczenie tych dowodów dałoby dopiero prawdziwą satysfakcję. Odkrycie analogicznych twierdzeń, cech podzielności, wcale nie musi być dziełem tylko najlepszych studentów.

Literatura

Białas, A.: 1960, *O podzielności liczb*, PZWS, Warszawa.

Gleichgewicht, B.: 2002, *Algebra*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław.

Sierpiński, W.: 1969, *Arytmetyka teoretyczna*, PWN, Warszawa.

Szurek, M.: 1987, *Opowieści matematyczne*, WSiP, Warszawa.

Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków