FOLIA 65

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis
Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia II (2009)

Henryk Kąkol, Witold Pająk

Rola programu komputerowego CABRI w rozwiązywaniu matematycznych problemów

Abstract. CABRI is a didactic program which has won a very stable position and is probably the most popular one in teaching mathematics. The program is constructed in such a way that it not only accepts and carries out tasks but it emits and stimulates certain behaviors itself, communicating them to the user. Program CABRI, using automatic means, allows to undertake activities corresponding to the so – called Platonian geometric constructions which are usually made with a pair of compasses and a ruler. It is used mostly for experimenting within the area of classical Euclidean geometry. Moreover, it also offers various other possibilities and might be used outside geometry. The essential role of CABRI, most frequently used in teaching at school, is using it to solve various tasks and problems – mainly in geometry. We often think what a student can do when his/her attempts to solve a particular problem are not effective. Is, in such cases, a computer program capable of helping him/her solve a mathematical problem? Working with CABRI, a student very quickly arrives at the right solution. That means that he/she finds the answer to the questions he/she asked himself/herself – the degree of certainty of the result the student achieves is high. He/she also becomes convinced that the answer is correct. A student's task in such a situation is to find theoretical grounds for the facts he/she has discovered.

1. Wprowadzenie

Jeszcze przed pojawieniem się profesjonalnych edukacyjnych programów matematycznych, wśród matematyków rozgorzała dyskusja na temat stosowania komputera do generowania dowodów matematycznych; nie ominęła też naszego kraju. Bezpośrednią przyczyną wymiany poglądów był opublikowany dowód *hipotezy czterech barw* (Davis, Hersh, 1981), który bardzo istotnie wykorzystywał komputer. Co więcej, autorzy dowodu mocno akcentowali znaczącą w nim rolę maszyny. Głos w tej sprawie zabierali w Polsce, m.in. R. Duda (Duda, 1982, s. 47) i Z. Semadeni (Semadeni, 1982, s. 56). Pierwszy z autorów wyraził pogląd, że

> komputer staje się tym, czym dla fizyka jest jego laboratorium, (...) prowadzi do odkrycia zjawisk, które następnie można opisywać i uzasadniać dedukcyjnie. Współdziała więc z dedukcją, ale jej nie zastępuje.

Takie stanowisko dla wielu praktyków i zwolenników problematyki wykorzystywania komputera jako środka dydaktycznego i dziś wydaje się naturalne, choć spojrzenie na rolę dowodu w szkole ulega nieustannym przeobrażeniom (Konior, 2003, s. 4) oraz (Turnau, 2001, s. 24). Wydaje się, że dyskusja w środowisku matematycznym zaktywizowała zwolenników komputeryzacji w nauczaniu, jakkolwiek w jednym i drugim przypadku nie chodziło dokładnie o to samo.

Pojawiła się cała plejada programów komputerowych zgrupowanych w dwu kategoriach:

- CAS (***C****omputer* ***A****lgebra* ***S****ystem*), np.: Derive, Maple, MuPAD, MathCad, Mathematica,
- DGS (***D****ynamic* ***G****eometry* ***S****ystem*), np.: The Geometer's Sketchpad, CABRI, CABRI 3D, CABRI 2 Plus, CAR, Cinderella, Euklides.

Wśród programów należących do DGS najbardziej znany jest program CABRI. Program ten wziął swoją nazwę od pierwszych liter francuskiego określenia *Le* ***CA****hier de* ***BR****ouillon* ***I****nteractif,* co oznacza dosłownie „interaktywny zeszyt", lub też w wolnym tłumaczeniu „brulion do pracy". Powstał on w Pracowni Struktur Dyskretnych i Dydaktyki Instytutu Informatyki i Matematyki Stosowanej Uniwersytetu im. Josepha Fouriera w Grenoble, afiliowanej przez francuski Narodowy Ośrodek Badań Naukowych (CNRS).

CABRI[1] jest programem dydaktycznym, który zyskał ugruntowaną pozycję w szkolnym nauczaniu matematyki. Program został tak skonstruowany, że nie tylko przyjmuje i wykonuje polecenia, ale sam emituje oraz stymuluje pewne zachowania, komunikując je użytkownikowi. Ten wzajemny wpływ i możliwość wiązanych działań obu stron – człowieka i komputera – powoduje, że stosowany program jest „przyjazny dla użytkownika". Znalazło to zresztą wyraz w pełnej nazwie programu, gdzie słowo „interaktywny" wskazuje na tę jego cechę.

Program CABRI pozwala środkami automatycznymi wykonywać takie czynności, które odpowiadają tzw. platońskim konstrukcjom geometrycznym za pomocą cyrkla i linijki. Służy więc głównie do eksperymentowania w obrębie klasycznej geometrii euklidesowej, choć jego zakres zastosowań i możliwości wykraczają poza szkolne ramy geometrii. Techniczne walory programu determinują także szeroki krąg użytkowników, od początkującego ucznia do profesjonalisty – matematyka, któremu CABRI pozwala nieraz spojrzeć w inny sposób na znane lub rozwiązywane problemy.

Pamiętajmy przy tym, że

[1] W artykule odnosimy się do programu komputerowego CABRI w wersji 2.

> najbardziej pomysłowe i nowoczesne środki poglądowe pozostaną tylko martwą dekoracją lekcji, jeżeli drogi od konkretu do abstrakcji, otwartej przez te środki, uczący się nie przebędzie aktywnie, z zaangażowaniem swej wyobraźni i myślenia.
>
> (Krygowska, 1977a, s. 67)

Podstawowym motywem korzystania z każdego środka dydaktycznego, a dotyczy to również CABRI, powinno być więc rozwijanie szeroko rozumianej aktywności matematycznej uczniów. Decyzja nauczyciela o wykorzystywaniu CABRI jako środka dydaktycznego w procesie nauczania matematyki powinna zatem być poprzedzona:

- głęboką analizą sytuacji dydaktycznej (cele do osiągnięcia, wiek i poziom uczniów, przewidywane metody itp.), w której środek ten ma być stosowany,
- równie wnikliwą koncepcją włączenia tego środka do procesu poznawczego na lekcji, uwzględniającą momenty trudne dla uczniów na drodze do abstrakcji,
- wyodrębnieniem, analizą i określeniem nowych lub interpretacją dotąd eksploatowanych cech i możliwości technicznych CABRI ze względu na dane treści matematyczne do opracowania z uczniami na lekcji lub w dłuższym czasie nauczania.

W trakcie użytkowania CABRI można wyróżnić dwie funkcje programu: techniczną oraz dydaktyczną. Funkcja techniczna CABRI często jest rozumiana jako możliwość skracania czasu operacji oraz zwielokrotniania pewnych czynności zewnętrznych występujących przy aktywnym działaniu typu matematycznego, w zasadzie służących stabilizacji, utrwaleniu i wspomaganiu myśli, a nie bezpośredniemu inspirowaniu jej kreatywnych form. To zwielokrotnienie możliwości użytkownika może iść w różnych kierunkach, np. otwierać drogę do szybszego rozważenia wielu przypadków, stwarzać szansę swobodnego badania różnych „kłopotliwych" położeń, umożliwiać szybki powrót do sytuacji wyjściowej, pozwalać na przechodzenie bez ograniczeń od jednej konfiguracji do drugiej itp. Służą temu takie opcje programu CABRI jak m.in.: wiązanie punktu z obiektem, uwalnianie obiektu, powiększanie lub pomniejszanie, możliwość pomiarów (kątów, długości odcinków). Oczywiście, ta rola nie wyklucza pewnych implikacji dydaktycznych, ale są one z reguły tylko pośrednie. Program o tyle wpływa na proces nauczania, o ile ma dlań znaczenie organizacyjne, racjonalizacyjne i skraca czas działań (wszystko to pod warunkiem nie zagubienia istotnych treści pojęciowych). Sam w sobie nie stwarza w tej roli nowych okoliczności poznawczych. W drugim przypadku natomiast program jako środek nauczania bezpośrednio przejmuje na siebie istotną rolę poznawczą, funkcjonuje więc w sensie dydaktycznym. Oznacza to, że wnosi do procesu dydaktycznego nie tylko elementy technicznego przyspieszenia czynności i organizacji pracy, ale również aktywizuje ten proces jako zespół działań podejmowanych dla przyswojenia pojęcia i wzbogaca o takie elementy, które mogą ukierunkowywać płodnie myśl ucznia przyswajającego pojęcie symetrii osiowej na płaszczyźnie i przekształcenia geometrycznego w ogólności.

W krajach zachodnich program CABRI pojawił się w szkołach w połowie lat 80. i od razu pojawił się cały szereg prac badawczych. W literaturze dydaktycznej można znaleźć wiele opisów badań w zakresie wykorzystania CABRI w procesie nauczania matematyki. Wymieńmy kilku autorów tych badań: Sierpińska, Dreyfus, Hillel, (1999), Bell, (1993), Bellemain, Capponi, (1992), Biehler, (1992), Laborde, (1992), Weth, (2000). Wśród tematyki badawczej, którą zajmowali się wyżej wymienieni autorzy, można wyróżnić problemy związane z:

1. Walorami dydaktycznymi programów komputerowych:
    a) łatwe otrzymywania rezultatów,
    b) wizualizacja matematyki,
    c) możliwość sprawdzania przewidywanych wyników,
    d) silniejsze oddziaływanie obrazu komputerowego niż wykonany rysunek na papierze,
    e) zdobywanie nowych doświadczeń,
    f) poszerzanie wiedzy.
2. Rolą nauczyciela w pracy z programem i możliwościami komunikowania się z uczniem w zakresie:
    a) sygnalizowania błędów,
    b) konstruktywnej krytyki poczynań uczniów,
    c) matematycznej poprawności.
3. Zachowaniem uczniów podczas pracy z komputerem:
    a) kończenie pracy nad zadaniem bez wykonania należytej analizy teoretycznej,
    b) atakowanie problemów, których rozwiązanie środkami tradycyjnymi byłoby niezwykle trudne.

Przykładowo R. Hölzl w swojej pracy (Hölzl, 1996) stawia następujący problem:

> Czy obserwacje dokonywane w programie CABRI i czynione na ich podstawie spostrzeżenia warunkują sposób atakowania problemu przez uczniów?

Poszukując odpowiedzi na tak sformułowane pytanie, przeprowadził badania w Niemczech wśród uczniów klas 9 i 10 planowo wykorzystujących CABRI na lekcjach matematyki. Obserwował uczniów pracujących w grupie trzyosobowej nad nieznanymi im problemami. Jeden z nich dotyczył *podziału dowolnego trójkąta na dwa trójkąty równoramienne*. W innym eksperymencie dotyczącym CABRI L. Vadcard (Vadcard, 1999) zajęła się badaniem *roli pomiaru w procesach akceptacji faktów geometrycznych*. W tym celu obserwowała pracę kilku par uczniów wybranych z klas używających regularnie na zajęciach z matematyki komputera. Został przed nimi postawiony problem *kątów wpisanego i środkowego opartego na tym samym łuku*.

CABRI[2] pojawił się w Polsce pod koniec lat 80-tych. Nie oznaczało to, że program ten od razu zagościł w szkołach. Wymagało to powstania grupy entuzjastów, chętnych do agitacji i rozpowszechniania jego idei. W dużej mierze byli nimi nauczyciele zafascynowani możliwościami programu, które sami odkrywali i poznawali jego własności. Dlatego też w tym czasie ukazało się wiele artykułów w czasopismach nauczycielskich (na początku były to: *Nauczyciele i Matematyka*, *Cabri Jest* i inne, lokalne, często związane z regionalnymi ośrodkami kształcenia nauczycieli). Artykuły z tego okresu relacjonowały pierwsze osobiste doświadczenia, a przede wszystkim własne przeżycia autorów w samotnych zmaganiach z CABRI (np. Pająk, Turnau, 1993); zaczęły się też pojawiać opisy lekcji – najczęściej dotyczące geometrii płaskiej (Pabich, 1993). Ich celem była także szeroko rozumiana popularyzacja programu CABRI w środowisku nauczycieli matematyki. W tej sytuacji zawarte w ówczesnych publikacjach przykłady ilustrowały głównie pozytywne aspekty jego wykorzystania, a nawet idealizowały jego przydatność w nauczaniu matematyki.

Trudno było wtedy pisać o planowym i zorganizowanym użyciu programu, gdyż sami nauczyciele dopiero go poznawali, a i warunki organizacyjno-techniczne szkół (np. dostęp do pracowni komputerowych) nie były dostosowane do użytkowania komputera na lekcjach matematyki.

Materiały zawarte w tamtych publikacjach są zapewne wartościowe i pożyteczne; dokumentują autentyczne fakty z lekcji szkolnych i z tej racji mogą stanowić punkt wyjścia zorganizowanych badań oraz formułowania naukowych hipotez. Szkicują też obraz tamtych dni – pierwszych chwil z CABRI w szkole.

W kwestii omawianych problemów dotyczących literatury warto nadmienić, że powstały nowe czasopisma specjalistyczne, a także już istniejące otwarły swoje łamy dla artykułów dotyczących komputerów i programu CABRI; należą do nich: *Matematyka i Komputery*, *CABRISTA, Komputer w szkole, Komputer w edukacji, Matematyka* oraz czasopisma środowiskowe ukazujące się na polskich uczelniach.

Na łamach tych czasopism publikowali swoje przemyślenia matematycy, dydaktycy matematyki, nauczyciele. Wśród wielu warto tu wspomnieć o dwóch.

[2]CABRI w wersji 1.

Pierwszym jest S. Turnau. W artykule napisanym w popularnej formie eseju (Turnau, 1994, s. 212) czytamy:

> nie chcemy bynajmniej namawiać, by pod pretekstem, że „nudna i trudna", szkolną geometrię zastąpić zabawą z komputerem i figurami – czymś, co z prawdziwą geometrią niewiele będzie miało wspólnego.

Pojawiające się w cytowanej pracy przykłady ilustrują proste zastosowania CABRI na lekcjach geometrii na różnym poziomie kształcenia – mają zaciekawić ucznia, pobudzić do własnych poszukiwań, a niektórym podsunąć pytanie: *dlaczego tak jest?*

Drugim z autorów jest J. Konior. Jego czteroczłonowa seria artykułów (Konior, 2002a), (Konior, 2002b), (Konior, 2002c), (Konior, 2003) ma w pewnym sensie charakter etapowego podsumowania poglądów nagromadzonych w środowisku szkolnym i literaturze głównie ostatniej dekady ubiegłego i początków bieżącego wieku. Podkreślmy przy tym dokonaną przez J. Koniora pogłębioną analizę dydaktyczną wskazanych przykładów oraz uwypuklenie niektórych istotnych różnic pomiędzy procesami myślowymi u uczniów zachodzącymi przy udziale CABRI i bez niego. Autor zachowuje i zaleca daleko idącą ostrożność w ocenie rezultatów posługiwania się komputerem, wskazując na potrzebę głębokiej analizy sposobów włączenia komputera do procesu dydaktycznego. Wyraźnie też akcentuje wątpliwości natury metodologicznej przy podejmowaniu badań nad możliwościami CABRI w różnych sytuacjach lekcyjnych. Prezentowany cykl stanowi pierwszą w Polsce próbę racjonalnej i osadzonej w dorobku dydaktyki matematyki oceny tego programu pod względem jego walorów jako nowoczesnego środka nauczania na różnych poziomach. Sam program Autor sytuuje bardzo wysoko, aczkolwiek uważa, iż jego wykorzystywanie na lekcji wymaga kompetencji; przypadkowe działania mogą nie tylko nie przynosić pożądanych rezultatów, ale być szkodliwe.

Poruszana w publikowanych w Polsce artykułach problematyka dotycząca wykorzystania CABRI w nauczaniu matematyki koncentrowała się na:

- lepszym rozumieniu pojęć geometrycznych,
- podwyższaniu aktywności w toku atakowania problemów geometrycznych,
- bardziej dojrzałym, planowym i metodycznym podejściu w rozwiązywaniu zadań,
- lepszym kształtowaniu wyobraźni geometrycznej.

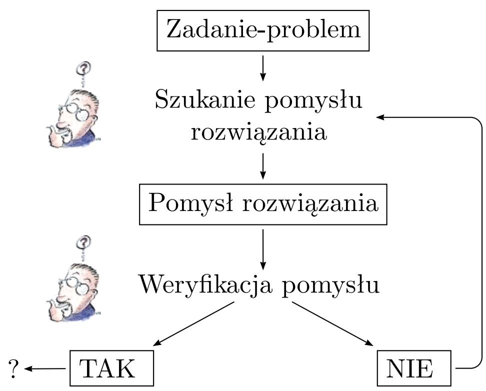
Na gruncie polskiej literatury dydaktycznej brakuje jednak opisów planowych badań naukowych podejmujących problematykę wykorzystywania programu CABRI w procesie nauczania matematyki. Tę lukę chcielibyśmy w pewnym sensie wypełnić, prowadząc badania nad rolą komputerowego programu CABRI w rozwiązywaniu problemów matematycznych[3]. Natomiast **celem tej pracy jest pokazanie, na przykładzie jednego zadania-problemu możliwości programu CABRI w zakresie odkrywania, formułowania i weryfikacji hipotez w trakcie rozwiązywaniu problemów.**

2. Rozwiązywanie problemów

Ważną i chyba najczęściej stosowaną w praktyce szkolnej rolą CABRI jest jego zastosowanie przy rozwiązywaniu zadań lub problemów – głównie w geometrii. Zgadzamy się również, że *geometria*

> jest nadzwyczajnym mikroświatem, w którym uczeń może zostać włączony w tworzenie rzetelnej, prawdziwej matematyki. Jest miejscem badania i odkrycia, uogólnienia, dla rozumowania zarówno indukcyjnego, jak i dedukcyjnego typu. Ogólnie – geometria wspiera rodzaj procesów rozumowania typowych dla matematycznego myślenia w jego najlepszym sensie: użycie matematycznej argumentacji dla sprawdzenia przypuszczenia, udoskonalenia go i w końcu wykazania, że jest ono poprawne.
>
> (Schoenfeld, 1982)

W literaturze przedmiotu zostało szeroko opisane rozwiązywanie problemów bez wykorzystywania komputerów (Kąkol, 1991, s. 85-92), (Polya, 1975), (Polya, 1993). Przywołajmy schemat ukazujący etapy pracy nad rozwiązaniem problemu matematycznego.



Schemat 1.

Uczeń postawiony w sytuacji problemowej korzysta głównie z własnego doświadczenia pozwalającego na generowanie pomysłów rozwiązania oraz później-

[3] Obecnie prowadzone są badania empiryczne nad rolą programu CABRI w rozwiązywaniu problemów matematycznych wśród młodzieży na różnych poziomach kształcenia, ze szczególnym uwzględnieniem uczniów zdolnych.

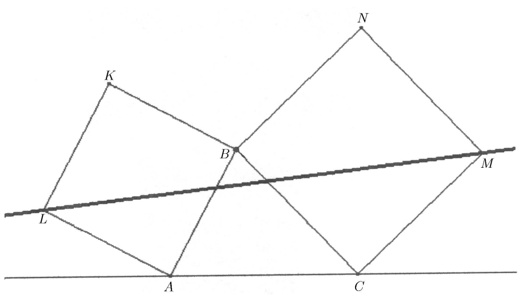
szą ich weryfikację. Zauważmy, że oba te ogniwa (tzn. *Szukanie pomysłu rozwiązania* oraz *Weryfikacja pomysłu*) mogą stanowić barierę trudną do przebycia dla ucznia. Zarówno brak pomysłów, jak i należytej ich weryfikacji mogą być przyczyną tego, że efekt końcowym, jakim jest rozwiązanie problemu, nie zostanie osiągnięty. Zaryzykujmy stwierdzenie, że tradycyjne sposoby poszukiwania pomysłów oraz ich weryfikacji oddziałują na ucznia jedynie od „wewnątrz" – można rzec w skrócie: *korzystaj z tego, co sam wiesz*; nie dostarczają więc bodźców zewnętrznych.

Innym zagadnieniem jest sytuacja, w której pomysł rozwiązania problemu został zweryfikowany pozytywnie i dzięki temu uzyskano rozwiązanie zadania. Ten etap nie powinien, zgodnie z zasadami dydaktyki (por. Krygowska, 1977c, s. 101) kończyć procesu rozwiązywania problemu, ale powinien być początkiem dalszych rozważań, a w szczególności prowadzić do przedłużania zadania różnymi metodami – przez uogólnienie czy specyfikację. Umiejętność stawiania nowych pytań, pytań prowadzących do nowych odkryć (na poziomie ucznia) jest procesem trudnym dla ucznia. Uczeń pozostawiony bez dodatkowej pomocy ze strony nauczyciela, który ma własną wizję pracy nad problemem, jest często bezradny i nie podejmuje dalszych wysiłków.

Zastanówmy się, jak może postąpić uczeń, gdy jego próby rozwiązania problemu nie przynoszą spodziewanych efektów. **Czy zastosowanie programu komputerowego w tych przypadkach może pomóc uczniowi w rozwiązywaniu problemu matematycznego?**

Dla przykładu rozważmy następujący problem:

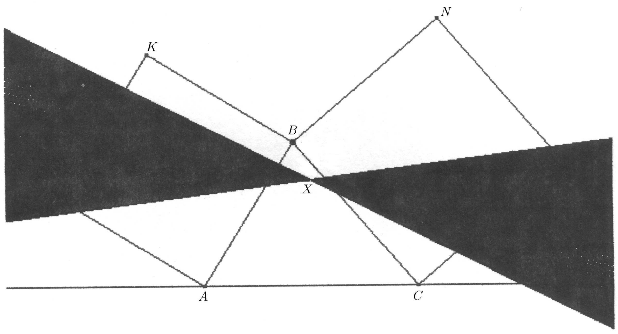
> Dana jest półpłaszczyzna oraz punkty A i C na jej krawędzi. Dla każdego punktu B tej półpłaszczyzny rozważmy kwadraty $ABKL$ i $BCMN$ leżące na zewnątrz trójkąta ABC. Wyznaczają one odpowiadającą punktowi B prostą LM. Udowodnij, że wszystkie proste odpowiadające różnym położeniom punktu B przechodzą przez jeden punkt (por. rysunek 1).
>
> (Pająk, Turnau, 1993, s. 22), (Turnau, 1993, s. 24)



Rysunek 1.

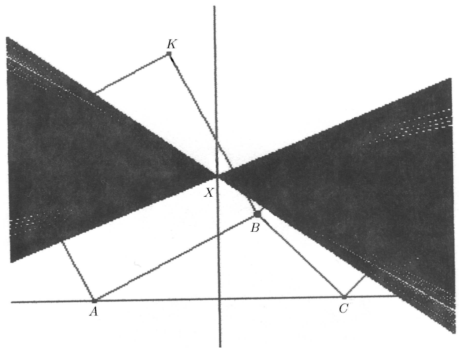
3. Rozwiązanie problemu wspomagane programem CABRI

Sporządzona konstrukcja w CABRI (por. rysunek 1) pozwala zmieniać położenie punktu B i obserwować usytuowanie prostych LM. Pojawia się wówczas hipoteza: *przy wszelkich zmianach położenia punktu B proste LM przechodzą przez jeden stały punkt.* Oznaczmy wspólny punkt prostych LM literą X.



Rysunek 2.

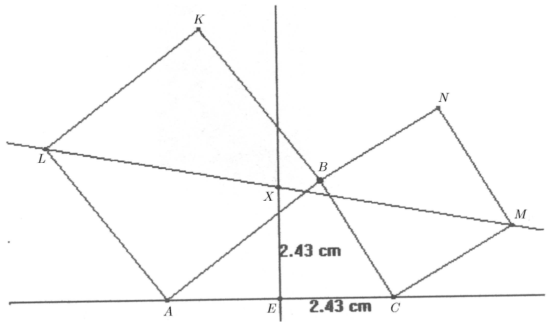
Nasuwa się kolejna hipoteza: *punkt X leży na symetralnej odcinka AC.* Dokonajmy weryfikacji empirycznej (tzn. metodami programu CABRI) postawionej hipotezy. W tym celu wykreślmy symetralną odcinka AC i ponownie utwórzmy ślad prostych LM przy wszelkich położeniach punktu B. Otrzymany rezultat pokazuje rysunek 3.



Rysunek 3.

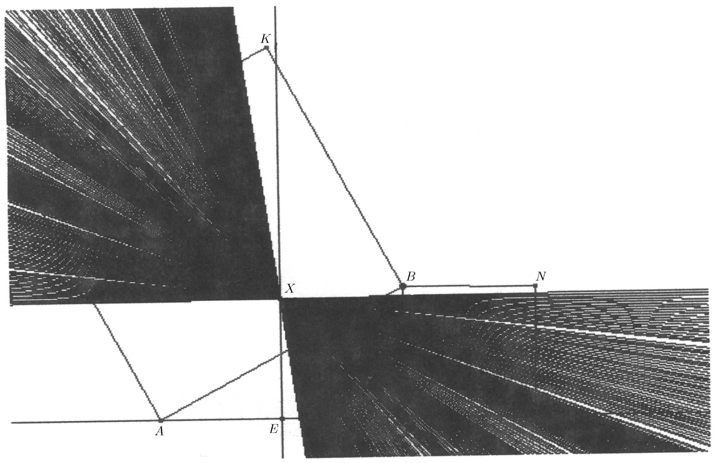
Analiza otrzymanych rysunków nasuwa hipotezę: *punkt X leży na symetralnej odcinka AC i jest odległy od prostej AC o połowę długości odcinka AC.* Oznaczmy przecięcie wyznaczonej symetralnej i odcinka AC literą E. Wykorzystajmy możliwość wykonania pomiarów do weryfikacji ostatniej hipotezy.

Rezultaty naszych badań ilustruje rysunek 4 – przekonuje nas o trafności postawionej hipotezy.



Rysunek 4.

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów dochodzimy do kolejnej hipotezy, że zbiór wszystkich prostych LM jest pękiem prostych. Dokonana weryfikacja empiryczna (por. rysunek 5) pozwala na doprecyzowanie postawionej hipotezy: *zbiór wszystkich prostych LM jest pękiem prostych z wyjątkiem symetralnej odcinka AC.*



Rysunek 5.

W wyniku poczynionych obserwacji oraz dokonanych weryfikacji empirycznych (środkami programu CABRI, poprzez: pomiar, ślad itp.) postawiliśmy hipotezy oraz dokonaliśmy ich weryfikacji. Mamy świadomość, że uzyskane tą drogą zależności wymagają poprawnego dowodu matematycznego opartego na rozumowaniu bez użycia komputera. Zauważmy jednak, że na poziomie przeciętnego ucznia szkoły powszechnej poszukiwanie teoretycznego dowodu wydaje się czynnością zbyt mocno wykraczającą poza jego możliwości. Zdajemy sobie jednocześnie sprawę, że

> podstawowym zadaniem dowodu jest ulepszanie zrozumienia matematycznych faktów i wniosków.
>
> (Prus-Wiśniowska, 1995, s. 174)

Niemniej jednak możemy rozumieć dowód również jako **p r o c e s b a d a w c z y**, który

> zawiera w sobie formułowanie problemu, rozwiązywanie problemu, układanie różnych części rozwiązania w logiczną całość, uogólnianie oraz dowodzenie.
>
> (Prus-Wiśniowska, 1995, s. 175)

Z takiego punktu widzenia możemy uznać, że stawianie hipotez i ich weryfikacja empiryczna (zarówno wykorzystująca komputer, jak i wykonana tradycyjnymi metodami) są częścią takiego właśnie procesu badawczego. Co więcej – oba te elementy wprowadzają ucznia w proces

> matematycznej twórczości, bez której *nie można zrozumieć piękna i sensu matematyki.*
>
> (Krygowska, 1977b, s. 13)

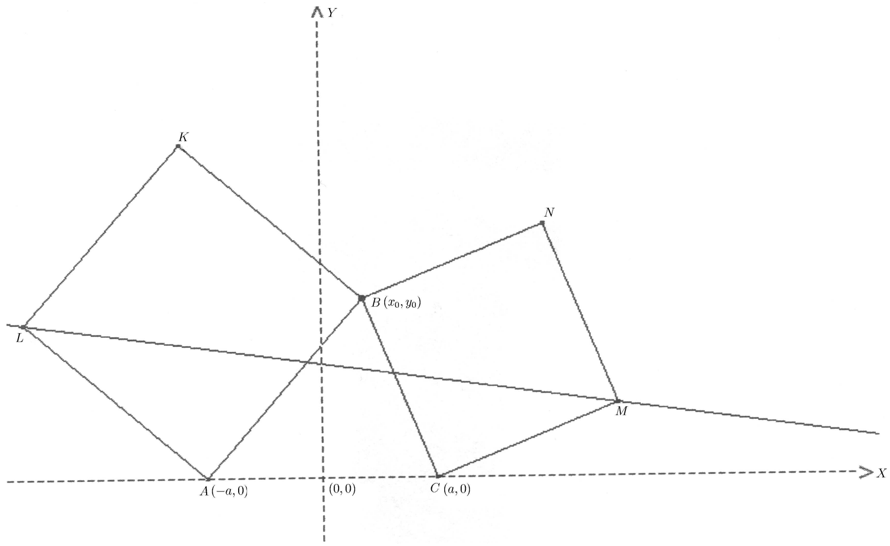
Zadowolimy się więc w pracy z uczniami samym postawieniem hipotez, próbą ich empirycznej weryfikacji oraz świadomością potrzeby matematycznego uzasadnienia. Rolą nauczyciela natomiast jest uświadamianie uczniom, czym są hipotezy – nawet zweryfikowane empirycznie – oraz czym jest matematyczny dowód.

4. Dowodzenie postawionych hipotez

4.1. Podejście I

Poczynione obserwacje mogą nasunąć pomysł przeprowadzenia dowodu z wykorzystaniem układu współrzędnych. Wprowadźmy go zatem w taki sposób, aby osią odciętych była prosta AC, a osią rzędnych symetralna odcinka AC (por. rysunek 6). Wówczas punkty A i C leżące na osi odciętych mają pierwsze współrzędne będące liczbami przeciwnymi, tzn. $A(-a, 0)$, $C(a, 0)$, gdzie a jest liczbą dodatnią.

Przyjmijmy ponadto następujące współrzędne punktu $B(x_0, y_0)$. Mając te dane, ustalmy współrzędne punktów: L i M – potrzebnych do wyznaczenia równania prostej LM. Punkt M leży na prostej prostopadłej do prostej BC i przechodzącej przez punkt C. Ponadto $|BC| = |CM|$. Zatem można wyznaczyć współrzędne punktu M.



Rysunek 6.

Prosta BC: $y = \frac{y_0}{x_0-a}x - \frac{y_0 a}{x_0-a}$. Prosta CM: $y = \frac{a-x_0}{y_0}x + a\frac{x_0-a}{y_0}$. Oznaczmy współrzędne punktu $M(x_1, \frac{a-x_0}{y_0}x_1 + a\frac{x_0-a}{y_0})$. Zatem ze związku $|BC|^2 = |CM|^2$ otrzymujemy: $(a-x_0)^2 + (0-y_0)^2 = (x_1 - a)^2 + (\frac{a-x_0}{y_0}x_1 + a\frac{x_0-a}{y_0} - 0)^2$, a stąd $y_0^2 = (x_1 - a)^2$, co pociąga za sobą: $x_1 = y_0 + a$ lub $x_1 = -y_0 + a$. Uwzględniając założenia zadania ($x_1 \geqslant a$), współrzędne punktu M są następujące: $M(y_0 + a, \frac{a-x_0}{y_0}(y_0 + a) + a\frac{x_0-a}{y_0})$, czyli (po uproszczeniu): $M(y_0 + a, a - x_0)$.

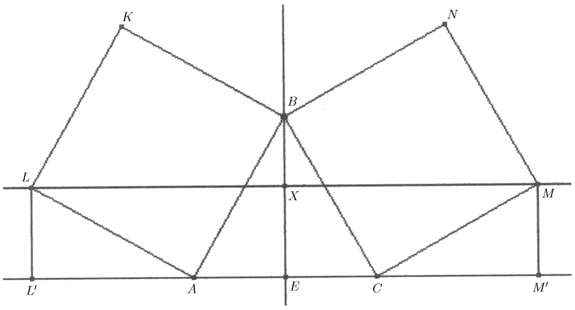
Postępując w sposób analogiczny, otrzymujemy współrzędne punktu L: $L(-y_0 - a, a + x_0)$.

Współrzędne punktów M i L są zależne więc od współrzędnych punktów A, C oraz B. Dochodzimy w ten sposób do równania prostej LM: $y = \frac{-x_0}{y_0+a}x + a$.

Teraz łatwo już zauważyć, że każda prosta LM przechodzi przez punkt $X(0, a)$, co oznacza, że wszystkie proste LM przechodzą przez jeden wspólny punkt. To spostrzeżenie kończy dowód twierdzenia.

4.2. Podejście II

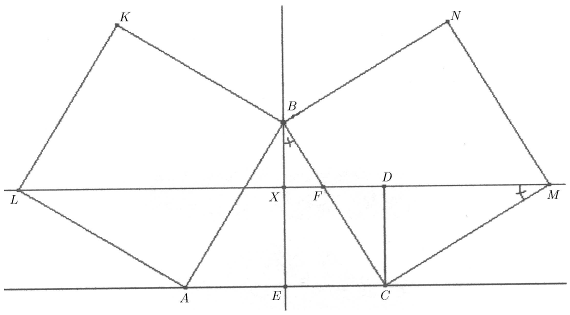
Program CABRI przyczynił się do postawienia i komputerowej weryfikacji hipotez. Spróbujmy teraz wykorzystać ten program do poszukiwania dowodu matematycznego postawionych hipotez. Rozważmy na początek przypadek szczególny: punkt B należy do symetralnej odcinka AC (por. rysunek 7).



Rysunek 7.

Okazuje się, że przy wszelkich położeniach punktu B (eksperyment w CABRI potwierdza ten fakt) prosta LM jest zawsze równoległa do prostej AC i odległa od niej o połowę długości odcinka AC. Aby pokazać prawdziwość tej hipotezy, zauważmy, że odcinki AB i BC są równej długości, co powoduje, że kwadraty $ABKL$ i $BCMN$ są przystające. Niech punkty M' i L' będą rzutami prostokątnymi punktów odpowiednio M i L na prostą AC. Trójkąty $CM'M$ i $AL'L$ są przystające (równość przeciwprostokątnych: $CM = AL$; równość kątów MCM' i LAL'). Tak więc odcinki MM' i LL' są równej długości i równe odcinkowi XE. Zauważmy dodatkowo, że trójkąty prostokątne $CM'M$ i BEC są przystające (odcinki BC i CM są równe oraz kąty MCM' i EBC są przystające). Z tego wnioskujemy, że odcinki MM' i EC są takiej samej długości. A zatem odcinek XE jest równy połowie długości odcinka AC (czyli prosta LM jest w stałej odległości od prostej AC – bez względu na położenie punktu B na symetralnej).

Udowodnioną hipotezę można także uzasadnić inaczej (por. rysunek 8).

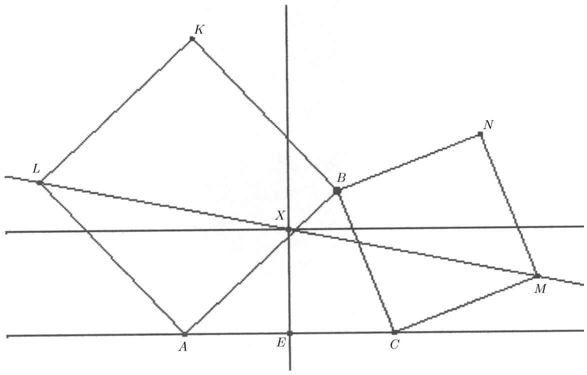


Rysunek 8.

Zauważmy, że trójkąty CFM i BEC są podobne; $DC = MC \sin\angle CMD$, $EC = BC \sin\angle EBC$; skoro $MC = BC$ oraz kąty CMD i EBC są równe, to odcinek $DC = EC$, a więc jest stały, bo EC to połowa stałego odcinka AC. Przedstawione rozumowanie dowodzi, że zmieniając położenie punktu B

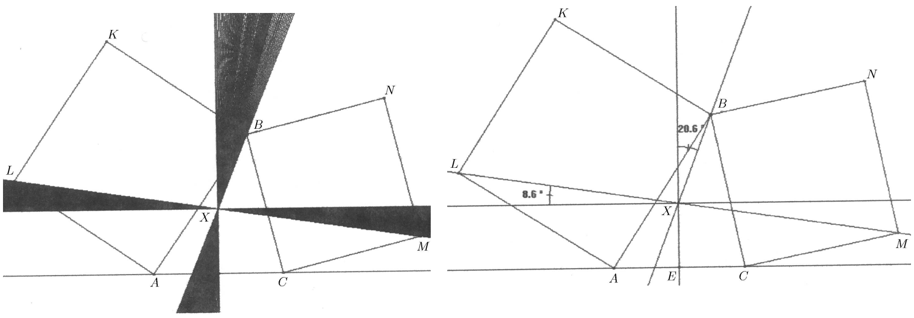
na symetralnej odcinka AC, proste LM są stałe i przecinają symetralną EB w punkcie X takim, że $EX = DC = EC = \frac{AC}{2}$.

Rozważmy teraz sytuację, w której punkt B nie należy do symetralnej odcinka AC. Ze względu na symetrię przeanalizujmy tylko takie położenie punktu B, że $BC < AB$ (por. rysunek 9).



Rysunek 9.

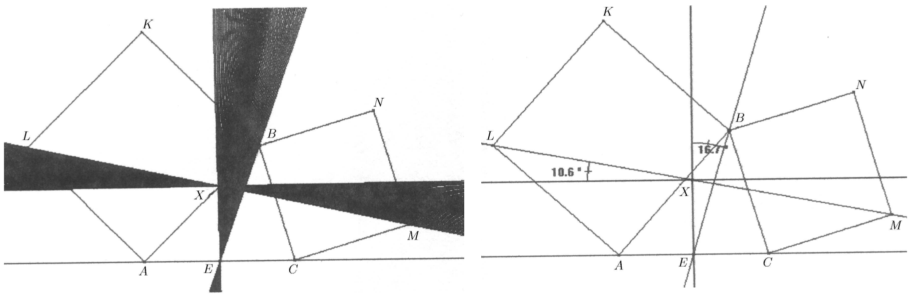
Poruszając punktem B, zmienia się położenie prostej LM – nasuwa się wówczas spostrzeżenie, że mamy tu do czynienia z obrotem prostej LM wokół punktu X; prosta LM jest obrazem prostej równoległej do AC w obrocie wokół punktu X o kąt α. Nasuwa się jeszcze inna myśl: *punkt B także obraca się o ten sam kąt α wokół punktu X*. Dokonajmy weryfikacji tak postawionej hipotezy (por. rysunki 10a, 10b).



a) b)

Rysunek 10.

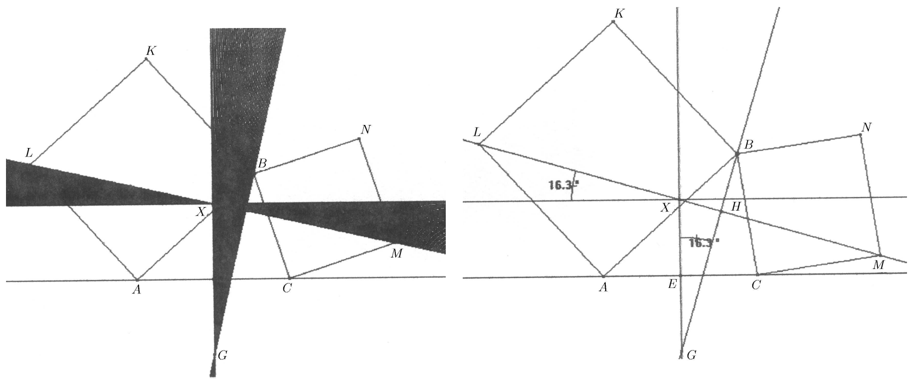
Dokonana weryfikacja obala hipotezę, że punktem obrotu jest X. Postawmy zatem inną hipotezę: *punkt B obraca się o kąt α wokół punktu E*. Również i w tym przypadku dokonana weryfikacja empiryczna (ślad, pomiar kątów) obala hipotezę, że środkiem obrotu jest punkt E (por. rysunki 11a, 11b).



a) b)

Rysunek 11.

Spróbujmy raz jeszcze dokonać obserwacji w CABRI. Poprowadźmy prostą prostopadłą do prostej LM i przechodzącą przez punkt B. Prosta ta przetnie symetralną odcinka AC w punkcie G. Stawiamy teraz hipotezę: *punkt B obraca się o kąt α wokół punktu G.*

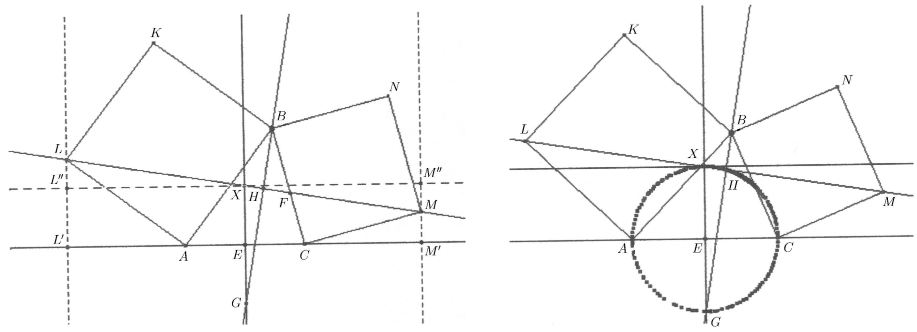


a) b)

Rysunek 12.

Zaznaczony ślad oraz dokonane pomiary (por. rysunki 12a, 12b) potwierdzają postawioną hipotezę, że punkt G jest środkiem obrotu o taki kąt, o jaki obraca się prosta równoległa do AC wokół punktu X. Nietrudno również znaleźć matematyczne uzasadnienie – wystarczy zauważyć, że proste: symetralna odcinka AC i równoległa do AC przechodząca przez punkt X oraz proste LM i BG są prostopadłe.

Przedstawmy teraz jeszcze inne spojrzenie na weryfikację postawionej hipotezy w paragrafie 3. Przyjmijmy w tym celu oznaczenia takie, jak na rysunku 13a: punkty M', M'', L', L'', to rzuty prostokątne punktów M i L odpowiednio na proste: AC i równoległą do AC przechodzącą przez punkt X. Ponadto punkt H jest wspólnym punktem prostej BG i równoległej do AC przechodzącej przez punkt X. Punkt F to część wspólna prostej LM i odcinka BC.



a) b)

Rysunek 13.

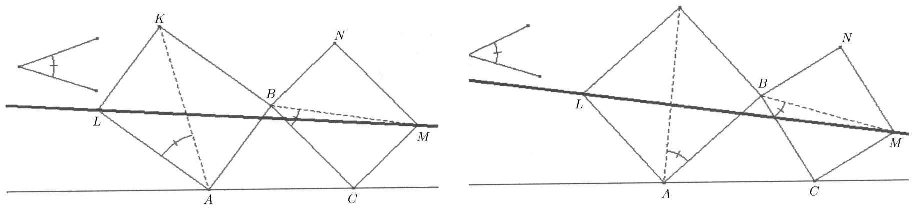
Wykorzystując obrót i jego własności, nietrudno wskazać trójkąty przystające: $XM''M$ i XLL'' (kąty wierzchołkowe, kąty proste i $LL'' = MM''$). Z tego wnioskujemy, że $XL = XM$. Korzystając z twierdzenia Talesa dla układu: proste $L'M'$ i LM oraz MM', XE i LL', otrzymujemy, że $EM' = EL'$. Ponadto zauważmy, że punkty X, H, G tworzą zawsze trójkąt prostokątny; zaznaczony dodatkowo ślad punktu H (przy wszelkich położeniach punktu B na całej płaszczyźnie) wskazuje na stały okrąg (por. rysunek 13b) – zatem punkty X i G są stałe. Jednocześnie takie umieszczenie punktu H, że $H = C$ wskazuje, że $EC = XE = GE$. Wykorzystując przypadek wcześniejszy (gdy punkt B należał do symetralnej odcinka AC), stwierdzamy, że $EX = EC = EA$.

Takie rozumowanie, choć niekompletne, zasługuje jednak na uwagę ze względu na jego szkolny charakter: wprowadza w metodę matematyczną oraz dodatkowo jest wynikiem ścisłego współdziałania ucznia z programem CABRI w sferze poszukiwań dowodu. Komputer weryfikuje w tym przypadku stawiane hipotezy: poprzez pomiar, dodatkowe wykreślenie prostych równoległych, okręgu itp. Z tego powodu praca ucznia nad problemem ma charakter wewnętrznego dialogu z programem CABRI.

Powróćmy do ostatniej hipotezy sformułowanej w punkcie 3. Rozważmy więc przypadek, gdy punkt B należy do prostej AC. Ślad prostych LM przy wszelkich zmianach położenia punktu B na prostej AC (por. rysunek 5) wskazuje, że proste LM tworzą pęk prostych; nie można jednak uzyskać symetralnej odcinka AC. Gdyby prosta LM pokryła się z symetralną odcinka AC, to by oznaczało, że punkt M byłby punktem symetralnej odcinka AC, a to z kolei generowałoby sytuację, w której punkt C pokrywałby się z punktem E, czyli $A = C$, co jest sprzeczne z treścią zadania. Skonstatujmy zatem: *proste LM, przy wszelkich zmianach położenia punktu B, przechodzą przez stały punkt, a same tworzą, z wyjątkiem symetralnej odcinka AC, pęk prostych.*

5. Przedłużanie zadania

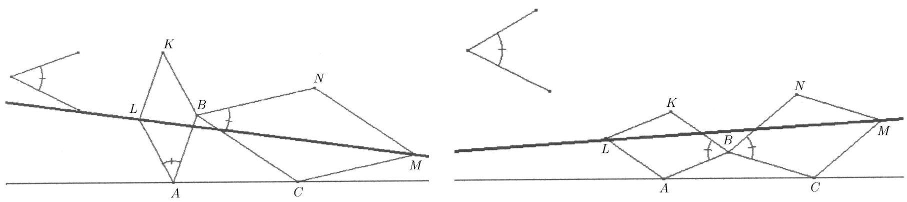
Rozpatrywane w paragrafie 4 twierdzenie zostało matematycznie uzasadnione. Możemy dokonać kolejnych eksperymentów w CABRI i postawić nowe pytania, np. *czy kwadraty można zastąpić innymi czworokątami, zachowując tezę twierdzenia?* Przedstawione powyżej objaśnienia, szczególnie dowód z wykorzystaniem układu współrzędnych (por. punkt 4.1), istotnie opierały się na założeniu, że rozważane czworokąty to kwadraty. Dlatego też rozumowania te nie sugerowały możliwości zastąpienia kwadratu innym czworokątem. Zamieńmy teraz owe kwadraty na prostokąty. Ustalmy dodatkowo ten sam kąt pomiędzy bokiem prostokąta a jego przekątną.



a) b)

Rysunek 14.

Wykonana konstrukcja w CABRI (por. rysunki 14a, 14b) wskazuje na dwie możliwości związane z umieszczeniem dodatkowego kąta. W obu przypadkach proste LM będą posiadać jeden wspólny punkt. Skoro teza twierdzenia wydaje się słuszna dla prostokątów, to sprawdźmy jej słuszność również dla rombów. Tutaj także potrzebujemy dodatkowego kąta – pomiędzy bokami rombu.

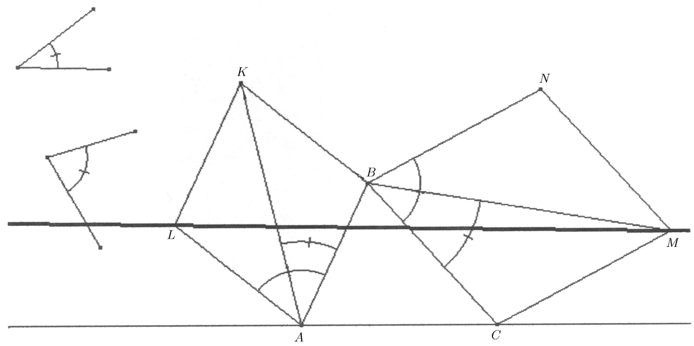


a) b)

Rysunek 15.

Jednak w przypadku rombu, w pierwszej sytuacji (por. rysunek 15a) proste LM przechodzą przez jeden stały punkt, a w drugiej (por. rysunek 15b) nie ma takiego stałego punktu. Taka obserwacja nasuwa myśl, że umieszczenie kąta w rombie ma decydujące znaczenie. Sytuacja, w której przy wierzchołku B są kąty α oraz $180° - \alpha$ (gdzie α jest danym kątem pomiędzy bokami rombu) daje pozytywny rezultat, tzn. przy tak usytuowanych rombach proste LM będą miały wspólny punkt.

Kolejna próba dotyczy równoległoboku. Jednak dla tego czworokąta trzeba określić dwa kąty: kąt pomiędzy bokami oraz kąt pomiędzy bokiem a przekątną (por. rysunek 16). Korzystając z wcześniejszych obserwacji dotyczących rombu i prostokąta, od razu ustalmy kąt pomiędzy bokami w taki sposób, aby przy wierzchołku B w sąsiednich równoległobokach kąty wynosiły: α oraz $180° - \alpha$.



Rysunek 16.

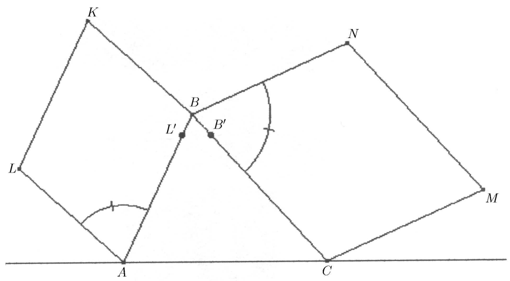
Również i w tym przypadku eksperyment w CABRI pozwala na sformułowanie hipotezy, że proste LM, przy wszelkich położeniach punktu B, przechodzą przez jeden punkt stały, który jest środkiem odcinka LM. Poczynione eksperymenty pozwalają jedynie na sformułowanie i dopracowanie następującej hipotezy:

> Dana jest półpłaszczyzna, punkty A i C na jej krawędzi oraz dwa kąty: α i β. Dla każdego punktu B tej półpłaszczyzny rozważmy równoległoboki $ABKL$ i $BCMN$ leżące na zewnątrz trójkąta ABC, przy czym kąty: CBN, BAL są równe α, a kąty BAK i MBC wynoszą β. Równoległoboki te wyznaczają odpowiadającą punktowi B prostą LM. Udowodnij, że wszystkie proste odpowiadające różnym położeniom punktu B przechodzą przez jeden punkt.

W celu udowodnienia powyższego twierdzenia wystarczyłoby pokazać, że punkt M jest obrazem punktu L w symetrii środkowej względem środka odcinka LM, bez względu na położenie punktu B. Zauważmy na początku, że punkt L można przekształcić na punkt M, korzystając z następujących przekształceń (por. rysunek 17):

- obrót punktu L wokół punktu A o kąt LAB (równy α) – powstanie punkt L' leżący na półprostej AB,
- jednokładność o środku w punkcie A i skali $s = \frac{AB}{AL}$ – obraz punktu L' pokryje się z punktem B,

- jednokładność o środku w punkcie C i skali $k = \frac{CM}{CB}$ – punkt B „przejdzie" na punkt B' w taki sposób, że $|CB'| = |CM|$,
- obrót punktu B' wokół punktu C o kąt BCM (równy $180° - \alpha$) – obraz punktu B' pokryje się z punktem M.



Rysunek 17.

W ten sposób otrzymujemy przekształcenie P przeprowadzające punkt L na punkt M: $O_C^{180°-\alpha} \circ J_C^k \circ J_A^s \circ O_A^\alpha(L) = M$.

Zwróćmy uwagę, że równoległoboki $BCMN$ i $ABKL$ są podobne (świadczy o tym równość odpowiednich kątów pomiędzy bokami i pomiędzy bokiem a przekątną). Zatem $\frac{AL}{AB} = \frac{BN}{CB}$. Skoro $BN = CM$, to $\frac{AL}{AB} = \frac{CM}{CB}$, czyli $k = \frac{1}{s}$ (lub $k \cdot s = 1$). Przywołajmy teraz następujące twierdzenie:

> Jeśli $M \neq N$ i $m \cdot n = 1$, to przekształcenie $J_M^m \circ J_N^n$ jest translacją.
> (Serafin, Treliński, 1976, s. 119)

Powołując się na cytowane twierdzenie, możemy stwierdzić, że: $J_C^k \circ J_A^s$ jest translacją – dodajmy do tego, że wektor translacji jest równoległy do AC. Zatem przekształcenie P przybiera następującą postać: $O_C^{180°-\alpha} \circ T_{\vec{w}} \circ O_A^\alpha$. Wszystkie trzy przekształcenia w tym złożeniu tworzące przekształcenie P są izometriami. Przywołajmy twierdzenie mówiące o rozkładzie przekształceń izometrycznych płaszczyzny na symetrie osiowe:

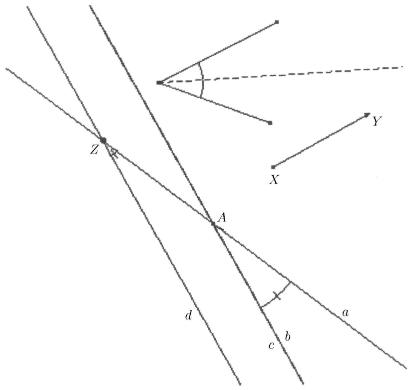
> Każda izometria jest symetrią osiową lub złożeniem dwóch symetrii osiowych lub złożeniem trzech symetrii osiowych.
> (Serafin, Treliński, 1976, s. 55)

Przypomnijmy również, że:

- translację o niezerowy wektor zastępujemy złożeniem dwóch symetrii osiowych o osiach równoległych, prostopadłych do wektora i odległych od siebie o połowę długości wektora,
- obrót o niezerowy kąt zastępujemy złożeniem dwóch symetrii osiowych o osiach przecinających się w środku obrotu i pozostających względem siebie pod kątem równym połowie kąta obrotu.

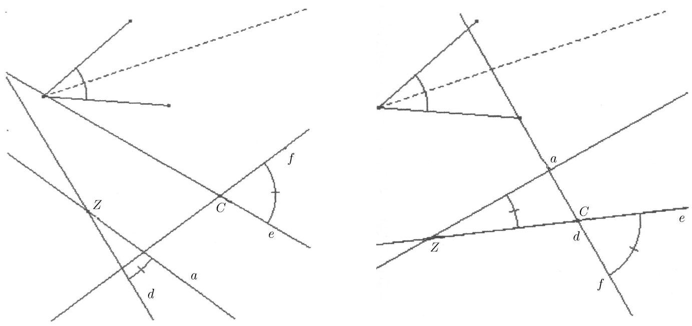
Rozważmy ogólnie nasze złożenie $O_C^{180^\circ-\alpha}\circ T_{\vec{w}}\circ O_A^\alpha$, zastępując każde z przekształceń odpowiednią liczbą symetrii osiowych według następujących zasad:

- $O_A^\alpha = S_b\circ S_a$, gdzie $a\cap b=\{A\}$ oraz $\angle\{a,b\}=\frac{\alpha}{2}$,
- $T_{\vec{w}} = S_d\circ S_c$, gdzie $c||d$ oraz odl $\{c,d\}=\frac{|\vec{w}|}{2}$,
- $O_C^{180^\circ-\alpha} = S_f\circ S_e$, gdzie $e\cap f=\{C\}$ oraz $\angle\{e,f\}=\frac{180^\circ-\alpha}{2}$.



Rysunek 18.

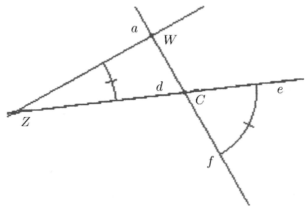
Rozpoznajmy najpierw złożenie $T_{\vec{w}}\circ O_A^\alpha$, ustalając położenie prostych a, b, c, d tak, jak na rysunku 18. Proste b i c pokrywają się – zatem złożenie dwóch symetrii osiowych względem tych prostych jest przekształceniem tożsamościowym. Stad wnioskujemy, że $T_{\vec{w}}\circ O_A^\alpha = S_d\circ S_a$, gdzie $a\cap d=\{Z\}$ oraz $\angle\{a,d\}=\frac{\alpha}{2}$. Zatem badane złożenie jest obrotem wokół punktu Z o kąt α. Ustalmy położenie pozostałych prostych e i f tak, jak na rysunku 19a.



a) b)

Rysunek 19.

Ustawienie prostych a, d oraz e, f może być dowolne z zachowaniem następujących właściwości: $a \cap d = \{Z\}$, $\angle\{a, d\} = \frac{\alpha}{2}$, $e \cap f = \{C\}$, $\angle\{e, f\} = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$. Zatem możemy proste a, d, e, f ułożyć w taki sposób, aby proste d, e pokryły się (por. rysunek 19b). Wówczas złożenie dwóch symetrii osiowych względem tych prostych jest przekształceniem tożsamościowym. Otrzymujemy w ten sposób wniosek, że nasze badane przekształcenie $P = O_C^{180^\circ - \alpha} \circ T_{\vec{w}} \circ O_A^{\alpha}$ jest złożeniem dwóch symetrii osiowych: $P = S_f \circ S_a$. Proste a i f, przecinając się, tworzą pewien kąt. Kąt ten możemy wyliczyć, korzystając z powstałego trójkąta ZCW (por. rysunek 20).



Rysunek 20.

Otrzymujemy następujący związek: $180^\circ = \angle ZWC + \frac{\alpha}{2} + \frac{180^o - \alpha}{2}$, zatem $\angle ZWC = 90^\circ$. Proste a i f przecinają się pod katem prostym. Szukane przekształcenie P jest złożeniem dwóch symetrii osiowych o osiach prostopadłych. Wynika stąd, że jest to symetria środkowa. Jeżeli dodamy do tego, że przekształcenie $P = O_C^{180^\circ - \alpha} \circ T_{\vec{w}} \circ O_A^{\alpha}$ (gdzie wektor $\overrightarrow{w} || AC$) jest zależne jedynie od stałych punktów A i C oraz od stałego kąta α, to dochodzimy do wniosku, że bez względu na położenie punktu B przekształcenie P przeprowadza punkt L na punkt M – przekształcenie P to symetria środkowa o dokładnie jednym punkcie stałym (środek każdego z odcinków LM). Zatem każda prosta LM (generowana przez dowolne położenia punktu B) przechodzi przez jeden stały punkt.

Zauważmy teraz, że na podstawie powyższego rozumowania twierdzenie dotyczące kwadratów (por. rysunek 1) można udowodnić jeszcze inaczej, a mianowicie: punkt M może być obrazem punktu L w symetrii środkowej (bo tylko w tym przekształceniu jest dokładnie jeden punkt stały, a punkty D, L i M są współliniowe). W tym celu wystarczy zauważyć, że punkt M jest obrazem punktu L w złożeniu dwóch obrotów:

- obrót punktu L wokół punktu A o kąt -90° (punkt L „przejdzie” na punkt B),
- obrót punktu B wokół punktu C o kąt -90° (punkt B „przejdzie” na punkt M).

Zatem $O_C^{-90^\circ} \circ O_A^{-90^\circ}(L) = M$. Punkty A i C są stałe, niezależne od punktu B. Wynika stąd, że złożenie dwóch obrotów o stałe kąty wokół niezmiennych punktów jest jednym z przekształceń izometrycznych – jest symetrią środkową względem punktu X.

6. Wnioskowanie empiryczne

Zastanówmy się w tym miejscu nad tym, w jakim sensie uczeń pracujący z programem CABRI prowadzi wnioskowanie empiryczne. Przypomnijmy, że Z. Krygowska (Krygowska, 1977a, s. 136) używa terminu *wnioskowanie empiryczne* w dwóch sytuacjach:

- uczeń obserwuje fizyczne stosunki przestrzenne lub ilościowe, występujące w jego naturalnym otoczeniu, w modelu lub na rysunku i bezpośrednio je matematyzując, to jest opisując w terminach matematycznych to, co widać lub stwierdza doświadczeniem, formułuje hipotezę matematyczną,
- uczeń wykonuje ciąg prób matematycznych (np. obliczeń) i dostrzegając pewną prawidłowość w rezultatach tych prób, formułuje hipotezę matematyczną.

Zilustrujmy omawiane sytuacje na schemacie.

WNIOSKOWANIE EMPIRYCZNE

Obserwacje w naturalnym otoczeniu, w modelu lub na rysunku

Ciąg prób matematycznych (np. obliczeń)

Schemat 2.

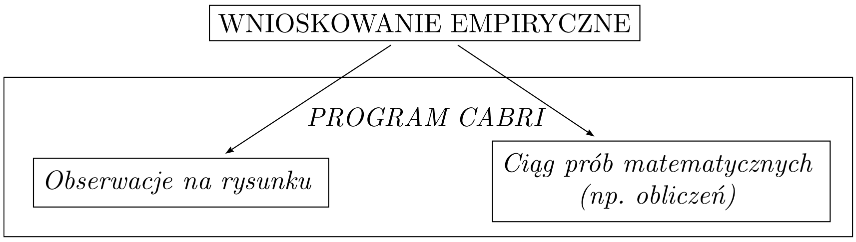
Możemy postawić pytanie: *z którą z tych dwóch sytuacji mamy do czynienia, wykorzystując program CABRI w celu poszukiwania i formułowania hipotez?*

Posłużmy się przykładem. Wykreślamy dowolny trójkąt i konstruujemy w nim środek okręgu opisanego, ortocentrum i środek ciężkości; zauważamy, że wymienione trzy punkty są współliniowe. Taka postawa odpowiada pierwszej z wymienionych powyżej sytuacji wnioskowania empirycznego – posługujemy się rysunkiem i na jego podstawie formułujemy hipotezę matematyczną. Możemy ją wzmocnić poprzez wykreślenie odpowiedniej prostej.

Rozważmy inny przykład: wykreślamy kąt, przecinamy jego ramiona dwoma prostymi równoległymi, wyznaczamy odpowiednie odcinki na jego ramionach, dokonujemy pomiaru ich długości, obliczamy odpowiednie stosunki. Zmieniamy teraz długości odcinków, zachowując równoległość przecinających ramiona kąta prostych – przy każdej zmianie obserwujemy obliczone stosunki odpowiednich odcinków. Za każdym razem stwierdzamy, że te stosunki są równe – formułujemy więc hipotezę matematyczną (por. Pająk, 2002). Taka postawa odpowiada niewątpliwie drugiej z wymienionych powyżej sytuacji wnioskowania empirycznego – wykonujemy ciąg prób matematycznych i dostrzegamy prawidłowość.

Rozważmy kolejny przykład. Wykreślamy okrąg, tworzymy i zaznaczamy kąty środkowy i wpisany oparte na tym samym łuku, korzystając z pomiarów mierzymy oba zaznaczone kąty. Zmieniamy położenie kąta wpisanego i obserwujemy zachodzące zmiany; dostrzegamy, że kąty wpisane mają tę samą miarę – dostrzegamy, bo obserwujemy rysunki, ale dostrzegamy również, bo patrzymy na wyliczone miary kątów i stwierdzamy, że są identyczne. Taka postawa może odpowiadać obu wyróżnionym sytuacjom.

Przedstawione przykłady wskazują, że program CABRI umożliwia uczniowi taką penetrację sytuacji geometrycznej, na podstawie której można dokonywać wnioskowania empirycznego w obu wskazanych przez Z. Krygowską sytuacjach. Zauważmy od razu, że program CABRI rozumiemy tylko jako innego rodzaju przestrzeń rysunkową; nie traktujemy go jako *naturalnego otoczenia ucznia*, ani *modelu*. Zmodyfikujmy zatem powyżej przedstawiony schemat (s. 90).



Schemat 3.

Otwartym i niezbadanym, jak dotąd, problemem pozostaje wzajemna zależność i uwarunkowania stosowania przez ucznia jednocześnie obu sytuacji wnioskowania empirycznego w pracy z programem CABRI.

7. Podsumowanie

Powyższe rozważania ilustrują ideę wykorzystania programu CABRI w trakcie rozwiązywania matematycznych problemów. Wymieńmy w tym kontekście najważniejsze zalety tego programu.

1. **Wykonany w CABRI rysunek jest bardzo dokładny i czytelny**. Uczeń korzysta z interpretacji, która staje się sugestywna; pozwala mu skupić się na poszukiwaniu rozwiązań, a nie na poddawaniu w wątpliwość dokładności rysunku czy też wnioskowaniu na podstawie rysunków ilustrujących szczególne przypadki. Poprzez dokładny rysunek uczeń nabiera pewności co do prawdziwości obserwowanych faktów.
2. **Otrzymany rysunek, poprzez możliwość ruchu, spełnia cechy rysunku interaktywnego**.

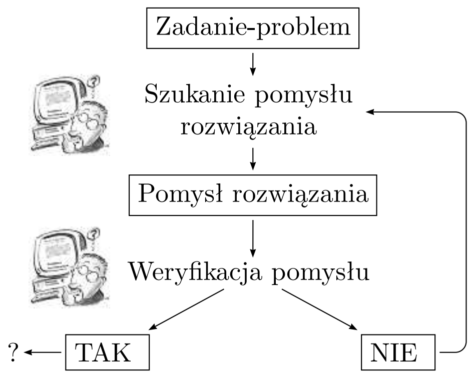
3. **Za jego pomocą można wykonać w krótkim czasie wiele eksperymentów**.
4. **Pokazujące się na ekranie obrazy pozwalają zauważać różnorodne własności i prawidłowości, a to z kolei ułatwia formułowanie hipotez**.
5. **Umożliwia wnioskowanie empiryczne**.
6. **W bardzo łatwy sposób można weryfikować stawiane hipotezy**. Zaprezentowane powyżej przykłady wskazują, że weryfikacja postawionych hipotez może przebiegać w programie CABRI w dwóch aspektach:

   - poszukiwanie kontrprzykładu – obalenie postawionej hipotezy,
   - wzmocnienie postawionej hipotezy poprzez dodatkowe czynności, takie jak: pomiary, konstrukcje prostych równoległych, kreślenie symetralnych itp.

   W każdej z tych sytuacji dotyczących weryfikacji postawionych hipotez mamy do czynienia z aktywnością uczniów – z myśleniem typu matematycznego ukierunkowanym na poszukiwanie lub przybliżanie się do matematycznego wyjaśnienia problemu. Można powiedzieć, że praca ucznia z programem CABRI aktywizuje go matematycznie i jednocześnie daje możliwość wyboru własnej drogi dochodzenia do prawdy matematycznej.
7. **„Zabawa” z rysunkiem na ekranie komputera może niejednokrotnie podsuwać pomysł rozwiązania, szczególnie w przypadku, gdy osoba rozwiązująca problem nie posiada żadnego pomysłu na rozwiązanie tego zadania**. Jest to bardzo ważny aspekt w pracy szkolnej. Z praktyki nauczycielskiej wiemy, że uczniowie, którzy nie mogą dostrzec na ręcznie wykonanym rysunku żadnych zależności, często porzucają pracę. Wówczas zachęty lub podpowiedzi nauczyciela powodują, że uczeń podejmuje jakąś próbę rozwiązania zadania. W przypadku pracy z CABRI obserwujemy mimowolną chęć penetrowania problemu, czasem przybiera ona znamiona zwykłej zabawy, chęci odpowiedzenia na pytanie: *co by było, gdyby…*. Takie próby samoczynnie powodują, że uczeń pracuje nad zadaniem, trudnym problemem dłużej, a program komputerowy zaspokaja jego potrzeby w sferze motywacyjnej.
8. **Wykonywane na ekranie komputera eksperymenty mogą podsunąć ideę dowodu**. Zaznaczmy, że metody weryfikacji stosowane w CABRI (pomiary, konstrukcje prostych równoległych, konstrukcje symetralnej odcinka itp.) mają charakter empiryczny – nie mogą być więc uważane za metody poprawnego dowodu matematycznego. Ten aspekt pracy z komputerem wymaga właściwych zabiegów dydaktycznych ze strony nauczyciela w stosunku do uczniów; nie można bowiem metod weryfikacji empirycznej utożsamiać z poprawnym dowodem matematycznym.

Niemniej jednak obserwacje dokonane w programie komputerowym mogą przybliżać, lub wręcz wskazywać uczniowi przesłanki do dowodu akceptowalnego z punktu widzenia matematyki.

Poniższy schemat wskazuje na miejsce i rolę komputera (programu CABRI) w rozwiązywaniu problemów, czy też w poszukiwaniu matematycznych uzasadnień.



Schemat 4.

9. **Możliwość spojrzenia „w przód”**. Rozwiązując zadania, poszukując dowodów twierdzeń, program CABRI (lub szerzej – program komputerowy) wprowadza nowy, niespotykany wcześniej komponent – pozwala nie tylko na spojrzenie „w tył”, ale na spojrzenie „w przód” (por. Kąkol, Ratusiński, 2004) wyrażające się przez stawianie nowych pytań, budowanie empirycznych potwierdzeń lub doświadczalnych kontrprzykładów. Co więcej – możliwości programu komputerowego w znacznej mierze niwelują ewentualne braki w wiadomościach (lub szerzej – kompetencjach matematycznych) pracujących z CABRI uczniów (por. Kutzler, 1999).

Zwróćmy również uwagę na zagrożenia, jakie płyną z używania komputera w procesie rozwiązywania problemów.

1. **Uczeń może poprzestać na odpowiedzi uzyskanej na drodze empirycznej bez konieczności jej teoretycznego uzasadnienia**. Przewidując taką postawę uczniów, nauczyciel w swojej pracy musi z niezwykłą stanowczością i starannością akcentować empiryczny charakter uzyskanych odpowiedzi oraz konieczność matematycznego potwierdzenia, gdyż *doświadczenie i obserwacja nie zawsze prowadzą do bezbłędnego poznania* (Krygowska, 1977a, s. 54). Nie zawsze proces rozwiązania zadania musi się zakończyć poprawnym rozumowaniem wyjaśniającym, czasem wystarczy przekonanie o potrzebie uzasadnienia odpowiedzi. Zdajemy sobie sprawę, że

> odwoływanie się do intuicyjnych zjawisk geometrii fizycznej jest niebezpieczne, ponieważ pozwala zawsze przypuszczać, że istnieje prawda geometryczna w samym rysunku.
>
> (Krygowska, 1977a, s. 60)

Takie sytuacje wymagają więc od uczniów większej niż zwykle dojrzałości metodologicznej przy rozwiązywaniu zadań z wykorzystaniem komputera.

2. **Wykonując rysunek t y l k o za pomocą programu CABRI, uczeń pozbawia się czasami innego (dopełniającego) spojrzenia na sytuację geometryczną.**

Powyższe zalety i zagrożenia pozwalają uchwycić różnice pomiędzy tradycyjnym sposobem rozwiązywania matematycznych problemów, a sposobem wykorzystującym program CABRI. Zwróćmy uwagę na bardzo istotną różnicę. W tradycyjnym sposobie uczeń poszukuje odpowiedzi, bada różne sytuacje, stara się znajdować potwierdzenia stawianych hipotez poprzez niedokładny rysunek lub rysunek w szczególnym przypadku, albo też posługuje się rozumowaniem formalnym, które z kolei często jest barierą trudną do przebrnięcia dla ucznia. Pracując z CABRI, uczeń bardzo szybko dochodzi do prawidłowego rozwiązania, tzn. znajduje odpowiedź na postawione pytania – otrzymuje rezultat z dużym stopniem pewności i własnym przekonaniem o słuszności odpowiedzi. Zadaniem ucznia w takiej sytuacji pozostaje znalezienie teoretycznego uzasadnienia faktów, które odkrył. Pracując z komputerem, uczeń koncentruje się nie tylko na poszukiwaniu odpowiedzi, ale celem pracy staje się przede wszystkim jej matematyczne uzasadnienie.

Zauważmy również, że pojedyncze rysunki wykonane na kartce są s t a t y c z n e i n i e r u c h o m e – dokonane na ich podstawie obserwacje mają charakter przewidywań, nie uwypuklają ewentualnych niezmienników. Natomiast prawidłowo wykonana konstrukcja w CABRI ma charakter dynamiczny, wskazuje na niezmienniki „dynamicznej” figury:

> jeśli jakiś przedmiot nie zmienia się, mamy tendencję do niezauważenia tego przedmiotu. Przedmiot w ruchu zwraca łatwiej uwagę niż przedmiot nieruchomy. Taka struktura matematyczna „w ruchu” oddzieli się od reszty i przyciągnie uwagę.
>
> (Krygowska, 1977a, s. 60)

Droga, jaką przemierza myśl ucznia rozwiązującego matematyczny problem, której początek to zaznajomienie się z treścią zadania-problemu, a koniec to w pełni poprawne matematyczne uzasadnienie, na ogół jest długa i wymaga od tegoż ucznia cierpliwości. Użycie programu komputerowego (w szczególności CABRI) może znacznie przyspieszać poszukiwanie przesłanek dla dowodu teoretycznego oraz umożliwiać szybką ich empiryczną weryfikację. Pozwala również na przedłużanie problemu poprzez nieskrępowane budowanie pomysłów oraz badanie nowych sytuacji. Realizuje się w ten sposób przesłanie:

> Prowokowanie ucznia do formułowania hipotez, dla których znajduje on jakąś intuicyjną lub empiryczną motywację – to bardzo ważny element procesu nauczania matematyki.
>
> (Krygowska, 1977a, s. 101)

Przeprowadzanie w pełni poprawnych matematycznych dowodów twierdzeń jest oczywiście możliwe do wykonania, ale nie zawsze dydaktycznie uzasadnione na poziomie szkolnym. Wówczas pozostaje konieczność zaakceptowania przez nauczyciela uzyskanego drogą eksperymentu wyniku uczniowskiego z jednoczesnym uświadomieniem uczniowi istnienia i potrzeby dowodu.

Literatura

Bell, A. W.: 1993, Some experiments in diagnistic teaching, *Educational Studies in Mathematics* **24**, 115-137.

Bellemain, F., Capponi, B.: 1992, Specificities od the Organization of a Teaching Sequence Using the Computer, *Educational Studies in Mathematics* **23**, 59-97.

Biehler, R.: 1992, Entwicklungen bei didaktischorienterten Softwarewerkzeugen zur Geometrie, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **4**, 121-127.

Davis, P., Hersh, R.: 1981, *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston.

Duda, R.: 1982, O nowej roli komputerów w matematyce, *Wiadomości Matematyczne* **XXIV**(1), 47-55.

Hölzl, R.: 1996, New trends in the teaching and learning of mathematics, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **3**, 93-96.

Kąkol, H.: 1991, Problemowe nauczanie matematyki a komputer, *Matematyka* **2**, 85-92.

Kąkol, H., Ratusiński, T.: 2004, Rola komputera w procesie rozwiązywania zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 119-138.

Konior, J.: 2002a, Repetytorium z CABRI, część I, *Matematyka i Komputery* **10**, 4-6.

Konior, J.: 2002b, Repetytorium z CABRI, część II, *Matematyka i Komputery* **11**, 5-8.

Konior, J.: 2002c, Repetytorium z CABRI, część III, *Matematyka i Komputery* **12**, 5-8.

Konior, J.: 2003, Repetytorium z CABRI, część IV, *Matematyka i Komputery* **14**, 4-9.

Krygowska, Z.: 1977a, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1977b, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 2*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1977c, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 3*, WSiP, Warszawa.

Kutzler, B.: 1999, The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics, *http://b.kutzler.com/bk/a-pt/ped-tool.html#scaffolding* .

Laborde, C.: 1992, Solving problems in computer based geometry environments: The influence of the features of the software, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **4**, 128-135.

Pabich, B.: 1993, Odkrywanie twierdzeń, *Nauczyciele i Matematyka* **6**, 20-21.

Pająk, J.: 2002, Odkrywanie twierdzenia Talesa wspomagane programem CABRI, *Matematyka i Komputery* **9**, 9-11.

Pająk, W., Turnau, S.: 1993, Jak CABRI pomógł w rozwiązaniu pewnego zadania olimpijskiego, *Nauczyciele i Matematyka* **5**, 22-24.

Polya, G.: 1975, *Odkrycie matematyczne*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Polya, G.: 1993, *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa.

Prus-Wiśniowska, E.: 1995, Dowód matematyczny i jego rola w dydaktyce matematyki: przegląd literatury współczesnej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **17**, 167-186.

Schoenfeld, A. H.: 1982, Measures of problem – solving performance and of problem – solving instruction, *Journal for Research in Mathematics Education* **13**(1), 31-49.

Semadeni, Z.: 1982, Uwagi do artykułu R. Dudy, *Wiadomości Matematyczne* **XXIV**(1), 56-57.

Serafin, S., Treliński, G.: 1976, *Zbiór zadań z matematyki elementarnej – geometria*, PWN, Warszawa.

Sierpińska, A., Dreyfus, T., Hillel, J.: 1999, Evaluation a teaching design in linear algebra the case of linear transformations, *Recherches en Didactique des Mathematiques* **19**(1), 7-40.

Turnau, S.: 1993, O zadaniu olimpijskim raz jeszcze, *Nauczyciele i Matematyka* **6**, 24-25.

Turnau, S.: 1994, CABRI i geometria elementarna, *Matematyka* **4**, 212-219.

Turnau, S.: 2001, O dowodzeniu twierdzeń we współczesnej szkole, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **23**, 25-32.

Vadcard, L.: 1999, La validation en geometrie au college avec CABRI – geometre, *PETIT X* **50**, 5-19.

Weth, T.: 2000, Computerunterstützung offener Aufgabenstellungen im Geometrieunterricht, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **6**, 166-174.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: henkakol@ap.krakow.pl

Liceum Ogólnokształcące
im. St. Konarskiego
ul. Konarskiego 24
PL-32-600 Oświęcim
e-mail: witold.pajak@neostrada.pl